
Épluchage des bois de Schnyder et des structures transverses

par

Erkan Narmanli, sous la direction de Gilles Schaeffer

ANR GATO, LIX, École Polytechnique, École normale supérieure, Université
Pierre et Marie Curie

Introduction : Dans ce mémoire on étudie deux classes de cartes décorées : les *bois de Schnyder* et les *structures transverses*. On se sert de méthodes proposées par Éric Fusy pour colorier ces modèles pour proposer une règle de génération de ces objets et en déduire des équations fonctionnelles sur leur séries génératrices.

A	Préliminaires	2
A.1	Structure de treillis des α -orientation	3
A.2	Exemple : orientations bipolaires	3
B	Définition des modèles	4
B.1	Bois de Schnyder	4
B.2	Structures transverses	7
C	Mise en équation	9
C.1	Épluchage des bois de Schnyder	9
C.2	Une équation fonctionnelle pour les bois de Schnyder	14
C.3	Épluchage des structures transverses	15
C.4	Relation fonctionnelle sur les structures transverses partielles . . .	19
	Conclusion	24
	Bibliographie	24

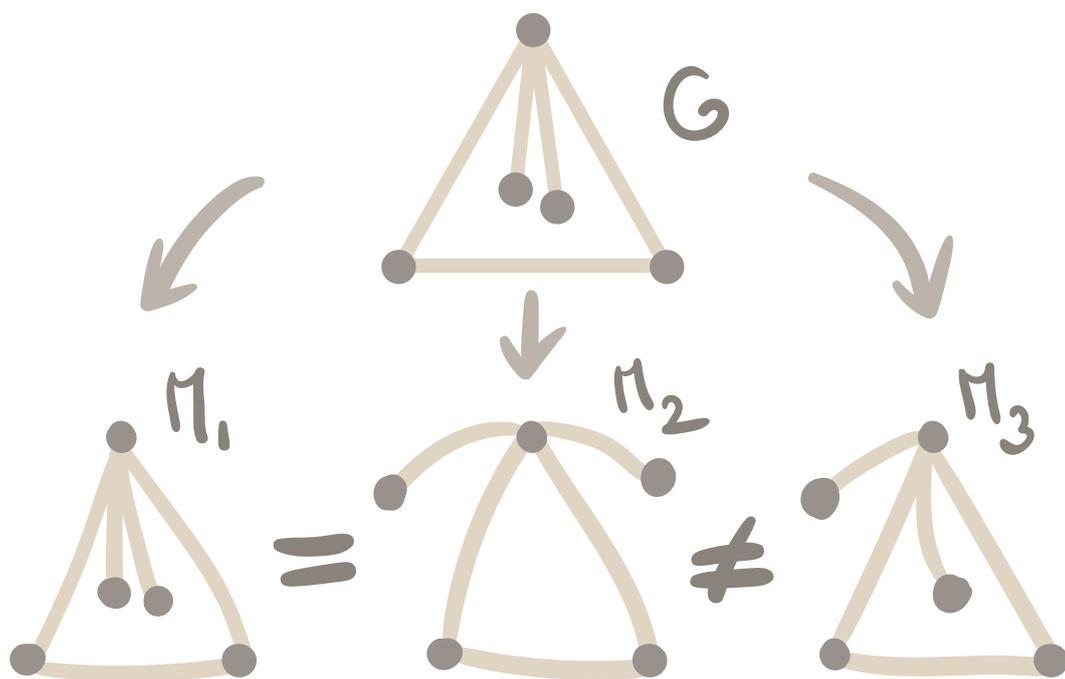


FIGURE 1 – Les cartes M_1, M_2, M_3 sont trois plongements du graphe G dans la sphère et alors que M_1 et M_2 sont homéomorphes et représentent la même carte, M_3 en désigne une différente.

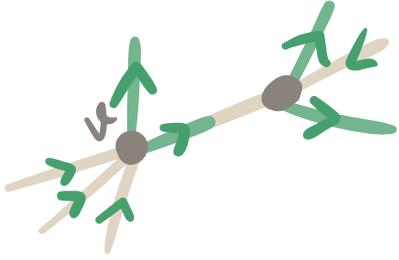
A Préliminaires

Une *carte plane* est un graphe connexe plongé dans la sphère sans croisement d'arêtes et considéré à homéomorphisme de la sphère près (voir figure 1). Dans la suite de cet exposé si G est une carte plane, on notera $\mathcal{V}(G)$ l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{E}(G)$ l'ensemble de ses arêtes. Notre étude ne portant que sur des objets planaires, on parlera indifféremment de carte et de cartes planaires. Nous allons étudier des familles de cartes décorées (par une orientation, une coloration, ou autre) et qui semblent partager une description commune à l'aide des α -orientations.

$\mathcal{V}(G)$
 $\mathcal{E}(G)$

Dans cette section on présentera quelques exemple de classes ces cartes décorées et on donnera quelques propriétés sur les α -orientations. Dans la seconde section on définira les deux classes sur lesquelles on souhaite travailler : les *bois de Schnyder* et les *structures transverses*. Enfin dans la dernière section nous introduirons deux objets intermédiaires à l'étude de ces objets : les *bois de Schnyder partiels* et les *structures transverses partielles* ; nous nous en servirons pour démontrer des règles de construction de ces objets et en déduire des équations fonctionnelles sur les séries génératrices des objets sous-jacents.

On pose ici quelques définitions qui nous seront utiles par la suite. Soit G un graphe, un *chemin* sur G est une suite v_1, v_2, \dots, v_k de sommets de G telles que deux sommets consécutifs soient toujours voisins. Un cycle est un chemin v_1, v_2, \dots, v_k avec $v_1 = v_k$. Un



$$\alpha : G \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\alpha(v) = \text{outdeg}(v)$$

FIGURE 2 – Illustration de la définition d’une α -orientation

chemin \mathcal{C} est dit *simple* si tout sommet apparaît au plus une fois dans \mathcal{C} . La *longueur* d’un chemin est son nombre d’arêtes : $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k$.

A.1 Structure de treillis des α -orientation

Étant données une carte G et une application $\alpha : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathbb{N}$, une α -orientation de G est une orientation des arêtes de G telle que pour tout sommet v de G le nombre d’arêtes sortantes de v soit égal à $\alpha(v)$ (voir figure 2). On parlera parfois de k -orientation pour désigner le cas d’une α -orientation où α est la fonction constante égale à k .

Un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné (E, \leq) tel que pour toute paire (x, y) d’éléments de E il existe un unique élément $x \wedge y$ et un unique élément $x \vee y$ tels que :

$$\begin{aligned} x \wedge y &\leq x & x \wedge y &\leq y & \forall z \in E, z \leq y \text{ et } z \leq x &\Rightarrow z \leq x \wedge y \\ x \vee y &\geq x & x \vee y &\geq y & \forall z \in E, z \geq y \text{ et } z \geq x &\Rightarrow z \geq x \vee y \end{aligned}$$

Un treillis est dit *distributif* si les opérateurs \wedge et \vee sont distributifs l’un par rapport à l’autre. On a le théorème suivant sur la structure des α -orientations d’un graphe planaire.

Théorème A.1 (Ossona de Mendez [dM94], Felsner [Fel04]). *Soient G un graphe planaire et une application $\alpha : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathbb{N}$; alors l’ensemble des α -orientations de G est soit vide soit forme un treillis distributif.*

A.2 Exemple : orientations bipolaires

Soit G une carte planaire, la *carte des angles* de G est la carte bipartie plane $Q(G)$ dont les sommets sont les sommets et les faces intérieures de G et telles que les arêtes de $Q(G)$ relient exactement les sommets et les faces qui sont incidentes, de telle sorte que chaque arête corresponde à un angle de G , voir figure 3.

Une orientation sur un graphe G est dite *acyclique* lorsque qu’il n’y a pas de circuit orienté, i.e. de cycle simple orienté. Étant donné une orientation acyclique sur G , un sommet sans arêtes sortantes est appelé un *puits* et un sommet sans arêtes entrantes est appelé une *source*.

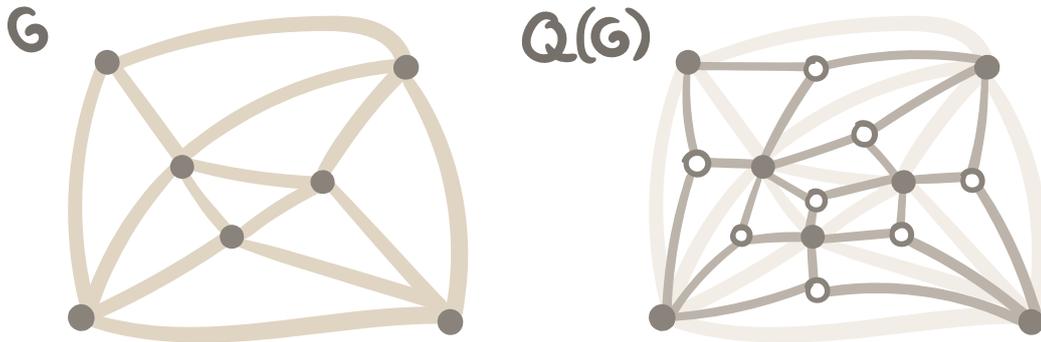


FIGURE 3 – À gauche une carte G ; à droite sa carte des angles $Q(G)$, avec les arêtes de G grisées.

Proposition A.2 (Caractérisation des orientations bipolaires). *Soit G un graphe, alors G admet une orientation bipolaire si et seulement si G est 2-connexe.*

À ce ceci près qu’il faille rajouter deux sommets pour la face extérieure dans la définition de la carte des angles donnée plus haut, on trouvera dans [dM94] une preuve qu’il est possible de donner une structure de α_2 -orientation à la carte des angles d’un graphe bipolaire, où α_2 est constante égale à 2 sauf pour les deux sommets de la face extérieure où elle vaut 0. On trouvera une illustration de ce résultat à la figure 4. On a même la bijection suivante :

Théorème A.3 ([dM94]). *Soit G une carte 2-connexe plane, alors il y a une bijection entre l’ensemble des orientations bipolaires de G et l’ensemble des α_2 -orientations de $Q(G)$.*

B Définition des modèles

On parlera de *triangulation d’un n -gone* pour parler d’une carte plane dont une face est un n -gone et toutes les autres sont des triangles ; par convention la face correspondant au n -gone sera appelée la face extérieure. On appellera *triangulation* une triangulation d’un triangle.

Un sommet ou une arête sera dite *extérieure* ou *intérieure* selon qu’il ou elle appartient ou non à la face extérieure. Dans la suite, si G est une triangulation d’un n -gone, on notera $|G|$ le nombre de triangles de G et $\|G\|$ le nombre de sommets intérieurs de G .

triangulation
d’un n -
gone

$|\cdot|, \|\cdot\|$

B.1 Bois de Schnyder

Soit G une carte orientée arête-coloriée sur {rouge, vert, bleu}, soit v un sommet de G , on dira qu’un sommet est *localement Schnyder* si dans le sens des aiguille d’une

locale-
ment
Schnyder

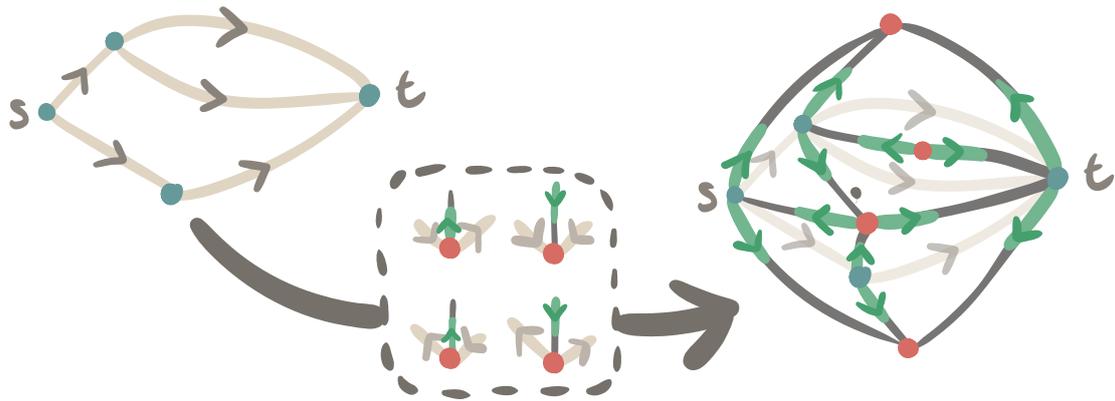


FIGURE 4 – Un orientation bipolaire et les règles qui permettent de donner une structure de 2-orientation sur sa carte des angles.

montre on a : une arête sortante verte, éventuellement des arêtes entrantes bleues, une arête sortante rouge, éventuellement des arêtes entrantes vertes, une arête sortante bleue, éventuellement des arêtes entrantes rouges (voir figure 5).

Soit S une carte orientée arête-colorié sur $\{\text{rouge, vert, bleu}\}$ d'un triangle (i.e. la face extérieure est un triangle) avec B, V, R les sommets de la face extérieure – lus dans le sens des aiguilles d'une montre. On dit que S est un *bois de Schnyder* lorsque :

- a. Tous les sommets internes de S sont localement Schnyder.
- b. Les arêtes internes incidentes en R, V, B sont toutes entrantes et respectivement rouges, vertes et bleues (cf figure 5).

bois de
Schnyder

On présente rapidement quelques propriétés fondamentales des bois de Schnyder.

Propriétés des bois de Schnyder

Proposition B.1 (caractérisation des bois de Schnyder, [Fus07]). *Soit G une carte planaire ayant un triangle pour face extérieure, alors G admet une coloration et une orientation qui fait d'elle un bois de Schnyder si et seulement si G est une triangulation.*

Proposition B.2 ([Fel04]). *Soit S un bois de Schnyder et T_r, T_v, T_b les graphes respectivement formés par les arêtes de couleur rouges, vertes et bleues. Alors :*

- Le graphe T_r est un arbre couvrant du graphe $S \setminus \{V, B\}$. De même T_v et T_b sont respectivement des arbres couvrants de $S \setminus \{R, B\}$ et $S \setminus \{R, V\}$.
- Pour tout sommet interne v de S , soient $\mathcal{P}_R(v), \mathcal{P}_V(v), \mathcal{P}_B(v)$ les chemins qui vont de v à respectivement, R, V et B ; alors les chemins $\mathcal{P}_R(v), \mathcal{P}_V(v), \mathcal{P}_B(v)$ ne se croisent qu'une seule fois : en v .

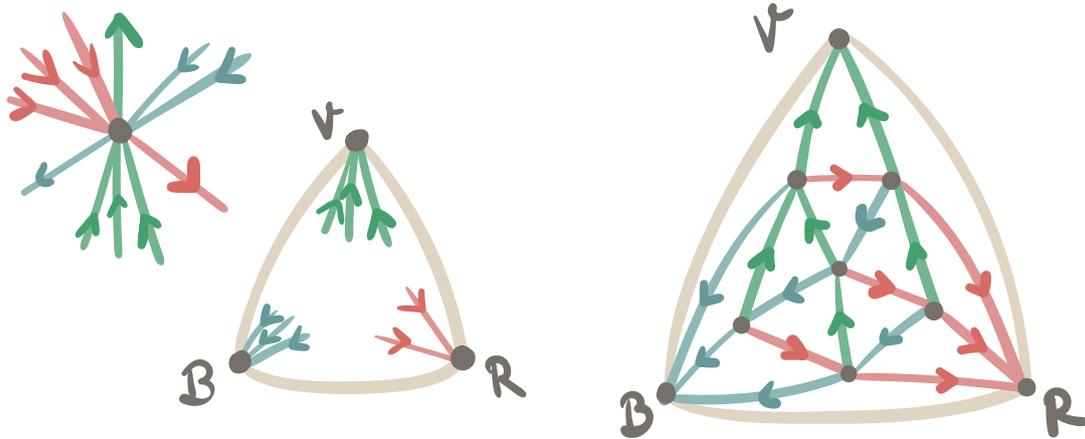


FIGURE 5 – À gauche les deux conditions de la définition d'un bois de Schnyder ; à droite un exemple de bois de Schnyder.

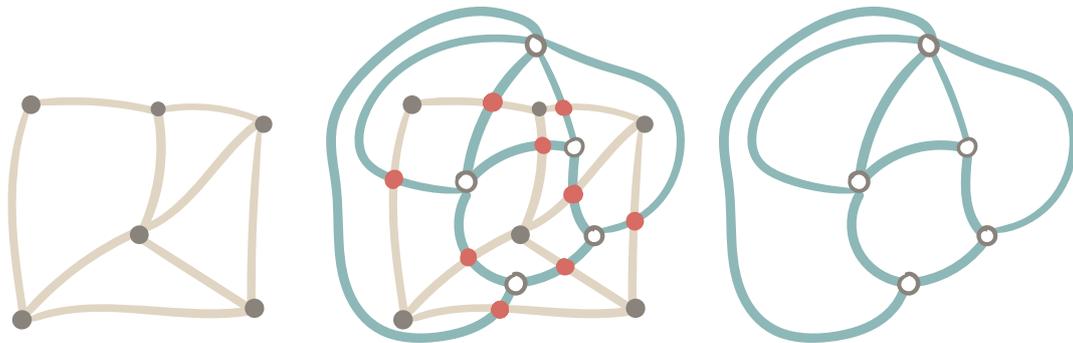


FIGURE 6 – À droite une carte plane, à gauche sa carte duale et au centre leur carte dérivée.

α -orientation des bois de Schnyder

Soit G une carte plane, on appelle *carte duale* de G et on note G^* la carte ayant pour sommets les faces de G et si $v_f, v_{f'}$ sont les sommets de G^* associées aux faces f et f' de G , alors on a un arête entre v_f et $v_{f'}$ dans G^* par arête en commun entre f et f' . La *carte dérivée* de G est alors la superposition de G et de sa carte duale (voir figure 6).

Soit S une triangulation et S' sa carte dérivée, on note $\alpha_3 : \mathcal{V}(S') \rightarrow \mathbf{N}$ l'application donnée par :

$$\alpha_3(v_s) = 3 \text{ si } v_s \text{ est le sommet d'un sommet de } S$$

$$\alpha_3(v_f) = 3 \text{ si } v_f \text{ est le sommet d'une face de } S$$

$$\alpha_3(v_e) = 1 \text{ si } v_e \text{ est le sommet au croisement de deux arêtes de } S \text{ et } S^*$$

carte
dual,
dérivée

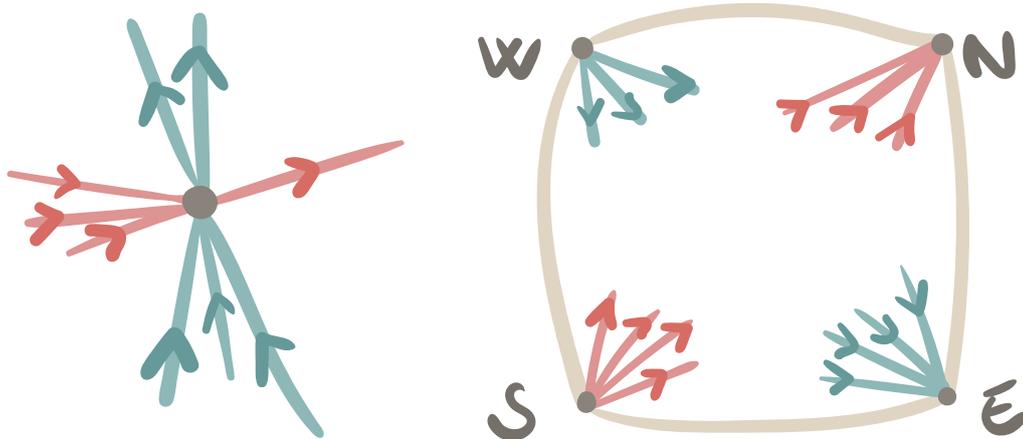


FIGURE 7 – On présente à droite la condition localement causale et à droite les conditions sur les sommets N, E, S, W d’une structure transverse.

Théorème B.3. *Avec les notations précédentes, on a une bijection entre les bois de Schnyder sur S et les α_3 -orientations sur S' .*

Remarque. On peut aussi donner directement à un bois de Schnyder une structure de 3-orientation (le degré sortant de chaque sommet interne est bien 3, il faut juste traiter à part les sommets extérieurs). Encore une fois l’ensemble de telles 3-orientations sur une triangulation est en bijection avec les bois de Schnyder sur elle.

B.2 Structures transverses

On va proposer une première définition des structures transverses comme une triangulation du carré, arête-coloriée et orientée. Il se trouve qu’il est possible d’oublier l’orientation qui est en fait implicite comme le montre Éric Fusy dans son article [Fus06].

Soit G une carte orientée arête-coloriée sur $\{\text{rouge}, \text{bleu}\}$, on dira qu’un sommet de G est *localement causal* si dans le sens des aiguilles d’une montre on a : un nombre non nul d’arêtes rouge entrantes, un nombre non nul d’arêtes bleues entrantes, un nombre non nul d’arêtes rouges sortantes, un nombre non nul d’arêtes bleues sortantes.

Une triangulation d’un n -gone sera dite *irréductible* lorsqu’il n’y a pas de 3-cycle qui ne soit pas la bordure d’une face. Soit T une triangulation du 4-gone, on note N, E, S, W les sommets de la face extérieure vus dans le sens des aiguilles d’une montre. On dira que T est une *structure transverse* lorsque :

- Tous les sommets intérieurs de T sont localement causaux.
- Les sommets N, E, S, W ont respectivement seulement des arêtes : entrantes rouges, entrantes bleues, sortantes rouges, sortantes bleues (voir figure 7).

localement
causale
irréduc-
tible

$N, E, S, W,$
structure
transverse

En 2015, des chercheurs en physique théorique, R. Loll et B. Ruijl introduisent un objet similaire : les *triangulations dynamiques localement causales* [LR15] qui ne diffèrent des structures transverses que par leur condition aux bords puisque les triangulations

considérées sont elles plongées dans le tore et ne distinguent pas de face extérieure. Dans ce modèle, les arêtes rouges modélisent le temps et les arêtes bleues l'espace ; cela leur permet de développer une théorie-jouet en (1+1) dimensions dans laquelle ils espèrent réussir à rapprocher la théorie quantique et celle de la relativité générale et de s'en servir pour étendre le modèle en (1+3) dimensions.

Propriétés des structure transverses

On présente dans ce paragraphe quelques propriétés importantes concernant les structures transverses et qui nous seront utiles par la suite.

Proposition B.4 (caractérisation des structures transverses, [Fus07]). *Soit T une triangulation du 4-gone, alors T admet une structure transverse si et seulement si T est irréductible.*

Proposition B.5 ([Fus06]). *Soit T une structure transverse alors l'orientation sur T est acyclique, les sources sont W et S et les puits sont E et N . De plus, les arêtes rouges induisent une structure d'orientation bipolaire sur le graphe obtenu en retirant W et E à T . De même les arêtes bleues induisent une orientation bipolaire sur le graphe obtenu en retirant N et S à T .*

Cette proposition justifie ainsi la terminologie de structure transverse. Enfin on énonce le résultat fondamental suivant sur les structures transverses :

Proposition B.6 ([Fus06]). *Soit T une structure transverse et T' le graphe colorié obtenu en retirant l'orientation sur T , alors il existe exactement deux orientations sur T' qui en fassent une structure transverse : celle donnée par T et celle où l'orientation de toutes les arêtes est renversée.*

Ce résultat justifie que l'on puisse parler de structure transverse pour désigner aussi bien l'objet orienté que l'objet non orienté ; les notations N, E, S, W introduites plus tôt suppriment l'ambiguïté possible sur l'orientation à choisir parmi les deux proposées par la proposition précédente. De la même manière, on parlera aussi de sommet *localement causal* pour désigner un sommet qui vérifie les mêmes propriétés que dans la définition initiale mais dans un graphe non-orienté. On a résumé les propriétés présentées dans cette partie dans la figure 8.

α -orientation des structures transverses

Dans [Fus06], on trouvera une justification du résultat suivant qui fait le lien entre les structures transverses et les α -orientations (figure 9).

Théorème B.7. *Soit T une triangulation irréductible du 4-gone, et $Q(T)$ la carte des angles de T . On note $\alpha_0 : \mathcal{V}(Q(T)) \rightarrow \mathbf{N}$ l'application donnée par :*

$$\begin{aligned} \alpha_0(N) &= \alpha_0(S) = 2 & \alpha_0(W) &= \alpha_0(E) = 0 \\ \alpha_0(v_s) &= 4 \text{ si } v_s \text{ correspond à un sommet de } T \\ \alpha_0(v_f) &= 1 \text{ si } v_f \text{ correspond à une face de } T \end{aligned}$$

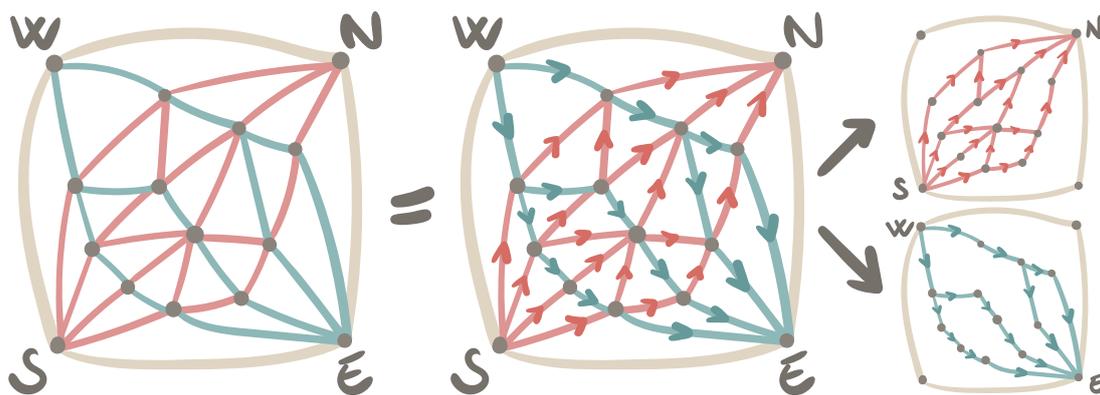


FIGURE 8 – Illustration des résultats des propositions B.5 et B.6

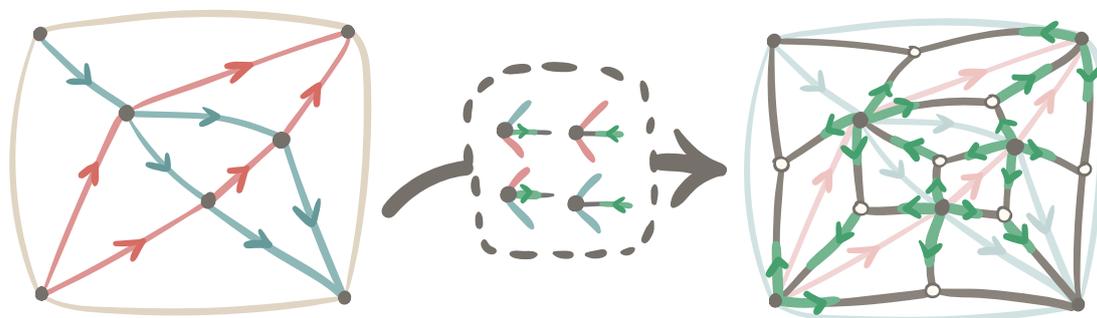


FIGURE 9 – Structure transverse et les règles pour donner à sa carte des angles une structure de α_0 -orientation.

Alors il y a une bijection entre les structures transverses sur T et les α_0 -orientations de sa carte des angles $Q(T)$.

C Mise en équation

C.1 Épluchage des bois de Schnyder

Bois de Schnyder partiels

On va utiliser la méthode proposée par Éric Fusy dans [Fus07] pour colorier les bois de Schnyder afin de les compter. On va introduire un objet intermédiaire pour compter les bois de Schnyder et qui va faire apparaître une règle de génération que l'on pourra utiliser pour obtenir une équation fonctionnelle sur la série génératrice des bois de Schnyder.

On va appeler *bois de Schnyder partiel* une triangulation S orientée arête-coloriée sur $\{\text{rouge, vert, bleu}\}$ d'un n -gone (pour n supérieur ou égal à 3) telle que :

bois de
Schnyder
partiel

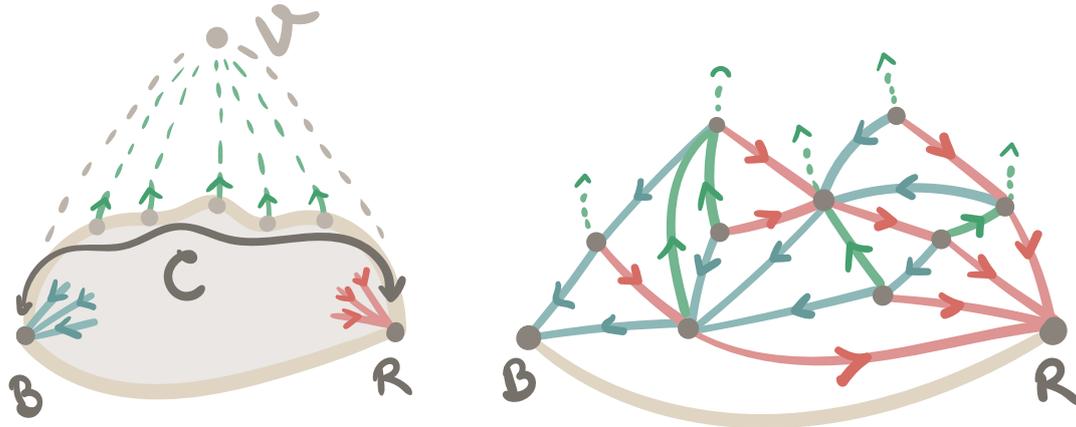


FIGURE 10 – Un résumé des conditions dans la définition d’un bois de Schnyder partiel, ainsi qu’un exemple à droite.

- Si \mathcal{C} est le bord de la face extérieure de S , alors \mathcal{C} est un cycle simple et distingue deux sommets R et B voisins sur \mathcal{C} . Par convention on ne coloriera pas l’arête $\{R, B\}$ et on ne lui donnera pas d’orientation.
- Tous les sommets à l’intérieur de \mathcal{C} sont localement Schnyder.
- Si v, v' sont deux sommets de \mathcal{C} alors on notera $[v, v']$ le segment de $\mathcal{C} \setminus \{R, B\}$ qui relie v à v' . Alors, pour tout v dans $]R, B[$, le sommet v devient localement Schnyder si on lui ajoute une demi-arête dirigée vers la face extérieure et toutes les arêtes de $[R, B]$ sont bleues ou rouges.
- Hormis $\{R, B\}$, toutes les arêtes incidentes à R sont rouges et dirigées vers R . Hormis $\{R, B\}$, toutes les arêtes incidentes à B sont bleues et dirigées vers B .

R, B, \mathcal{C}

$[v, v']$

On verra un exemple à la figure 10 d’un bois de Schnyder partiel. Il s’agit en d’autres termes d’un bois de Schnyder auquel on aurait retiré le sommet V . On notera \mathcal{S} l’ensemble des bois de Schnyder partiels. S’il n’y a pas d’ambiguïté on utilisera les notations \mathcal{C}, R, B comme dans la définition précédente.

\mathcal{S}

En peut voir les bois de Schnyder partiels comme des bois de Schnyder auxquels on aurait retiré le sommet V , pour cette raison, si S est dans \mathcal{S} , on va considérer tous les sommets du bord de S dans $\|S\|$, hormis R et B .

Section minimale

Soit S un bois de Schnyder et v un sommet de $\mathcal{C} \setminus \{R, B\}$, on dira que v est *admissible* si l’arête juste à gauche de v sur \mathcal{C} est sortante bleue et l’arête juste à droite de v sur \mathcal{C} est sortante rouge. La *section admissible* associée à v est alors l’ensemble des triangles qui sont incidents en v , on parlera indifféremment de bande admissible et de sommet admissible. Compte tenu de la définition d’un sommet localement Schnyder, toutes les

sommet,
section
admissible

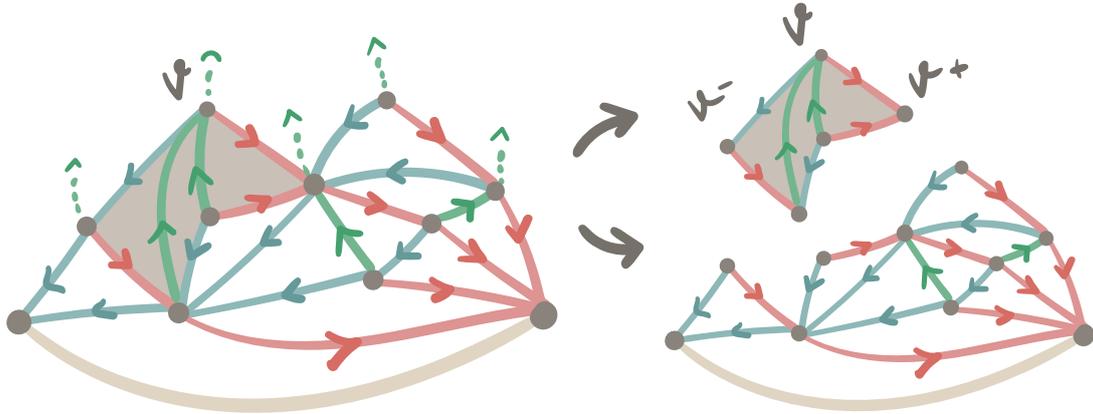


FIGURE 11 – Section minimale associée au sommet v , définition de v^- et v^+ .

arêtes à l'intérieur de la section sont vertes et dirigées vers v , voir figure 11. On notera S_0 l'unique élément de \mathcal{S} qui est réduit à un triangle. Soient v, v' deux sommets admissibles d'un bois de Schnyder partiel S , on dit que v est à gauche de v' si v apparaît avant v' dans le chemin $[B, R]$. Si v est dans $]B, R[$, on note v^- le sommet juste à gauche de v et v^+ le sommet juste à sa droite.

S_0

v^-, v^+

Proposition C.1. *Soit S un bois de Schnyder partiel, alors S admet un sommet admissible v , et si S est différent de S_0 , alors l'objet obtenu en retirant v à S est encore dans \mathcal{S} .*

Démonstration. On va noter $[B, R]$ le chemin : $B = v_0, \dots, v_n = R$. La condition d. dans la définition d'un bois de Schnyder partiel assure que l'arête $v_{n-1}v_n$ est rouge dirigée vers R et que v_0v_1 est bleu dirigée vers B . Soit $v_{i-1}v_i$ la dernière arête de $[B, R]$ qui n'est pas rouge dirigée vers R , alors la condition semi-localement Schnyder donnée en c. assure que $v_{i-1}v_i$ est bleu dirigée vers B . Le sommet v_i est donc bien admissible.

Soit S' l'objet obtenu en retirant le sommet admissible v à S . On va vérifier que S' est encore dans \mathcal{S} . La condition a. sur le bord est bien vérifiée. De plus les sommets à l'intérieur de S' étaient déjà à l'intérieur de S donc on a bien la condition b. Les arêtes en bas de la bande admissible sont bien soit bleues soit rouges car si w est en bas de la bande, il avait dans S une arête verte dirigée vers v et comme w était localement Schnyder, alors les arêtes de part et d'autre de wv sont bleues ou rouges.

Enfin la condition c. est claire pour les sommets sur les chemins $[B, v^-[_{S'}$ et $]v^+, R]_{S'}$ qui étaient déjà sur le bord de S . Cela est aussi clair pour les sommets qui sont dans l'intervalle $]v^-, v^+[_{S'}$ puisqu'ils étaient localement Schnyder lorsqu'ils avaient une arête sortante verte vers v . En ce qui concerne v^- et v^+ : on leur a retiré à chacun une arête entrante (rouge pour v^+ et bleue pour v^-) et de telles arêtes ne sont pas nécessaires pour être localement Schnyder. On a donc bien montré que S' est encore dans \mathcal{S} . \blacklozenge

Pour éplucher un élément de \mathcal{S} , on va retirer à chaque étape une section admissible. Pour que l'épluchage soit unique on veut que le choix de la section en question soit canonique. On appellera *section minimale* de S la section admissible dont le sommet associé est le plus à droite, ceci définit bien une unique section. On appellera *sommet minimal* le sommet de C associé à la section minimale de S .

section
minimale

Épluchage

L'épluchage d'un bois de Schnyder partiel consiste à retirer au fur et à mesure une section minimale au bois; comme le choix de la section est unique à chaque étape, cela définit un unique épluchage. On pourra trouver un exemple d'épluchage sur la figure 12.

Pour pouvoir obtenir une règle de génération des bois de Schnyder partiels qui nous permette de déduire une équation fonctionnelle sur la série génératrice, on souhaite comprendre le processus inverse qui consiste à rajouter une section qui soit minimale à un bois de Schnyder partiel. Si on note $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S} \setminus S_0$ l'application qui à un bois de Schnyder partiel S associe S ôté de sa section minimale, le but est donc d'expliciter la pré-image d'un bois de Schnyder partiel par ψ . On introduit des grandeurs qui vont permettre garder compte de la position de la section minimale et nous permettre de savoir où il nous est possible d'en rajouter une. Soit S un élément de \mathcal{S} et v son sommet minimal, on notera $\ell(S)$ la longueur du chemin $[B, R]$, $a(S)$ la longueur du chemin $[B, v]$, et $b(S)$ la longueur du chemin $[v, R]$, enfin on notera $i(S)$ la longueur du bord inférieur de la section minimale; voir figure 13 dessin de gauche.

ψ

l, a, b, i

Soit $\mathcal{S}(K; A, B)$ l'ensemble des bois de Schnyder S tels que le nombre de sommets $\|S\| = K$, avec $a(S) = A$ et $b(S) = B$. Soit S' dans $\mathcal{S}(K; A, B)$, on va décrire les paramètres k, ℓ, a, b d'un élément S dans $\psi^{-1}(S')$:

- Soit v' le sommet minimal de S' et v celui de S , pour que v soit minimal dans S est nécessaire et suffisant que v^+ soit à droite – au sens large – de v' , on a donc b compris entre 1 et $B + 1$.
- Une fois la position de v fixée, il est possible de mettre dans la bande minimale de v autant de triangles qu'il reste d'arêtes à droite de v^+ , c'est-à-dire que i varie entre 1 et $L + 1 - b$.
- Ensuite, le nombre de sommet rajouté est 1, on a donc $k = K + 1$.
- Enfin la nouvelle longueur du bord au dessus de S est donnée par $\ell = L - i + 2$. C'est-à-dire que $a + b = A + B - i + 2$, on a donc $a = A + B - b - i + 2$.

On a résumé ces relations dans la figure 13. Ces relations nous donnent donc la règle de construction :

$$\begin{aligned} S' \in \mathcal{S}(K; A, B) \mapsto S \in \mathcal{S}(K + 1; A + B - b - i + 2, b) \\ \text{pour } 1 \leq b \leq B + 1 \text{ et } 1 \leq i \leq A + B + 1 - b \end{aligned} \quad (1)$$

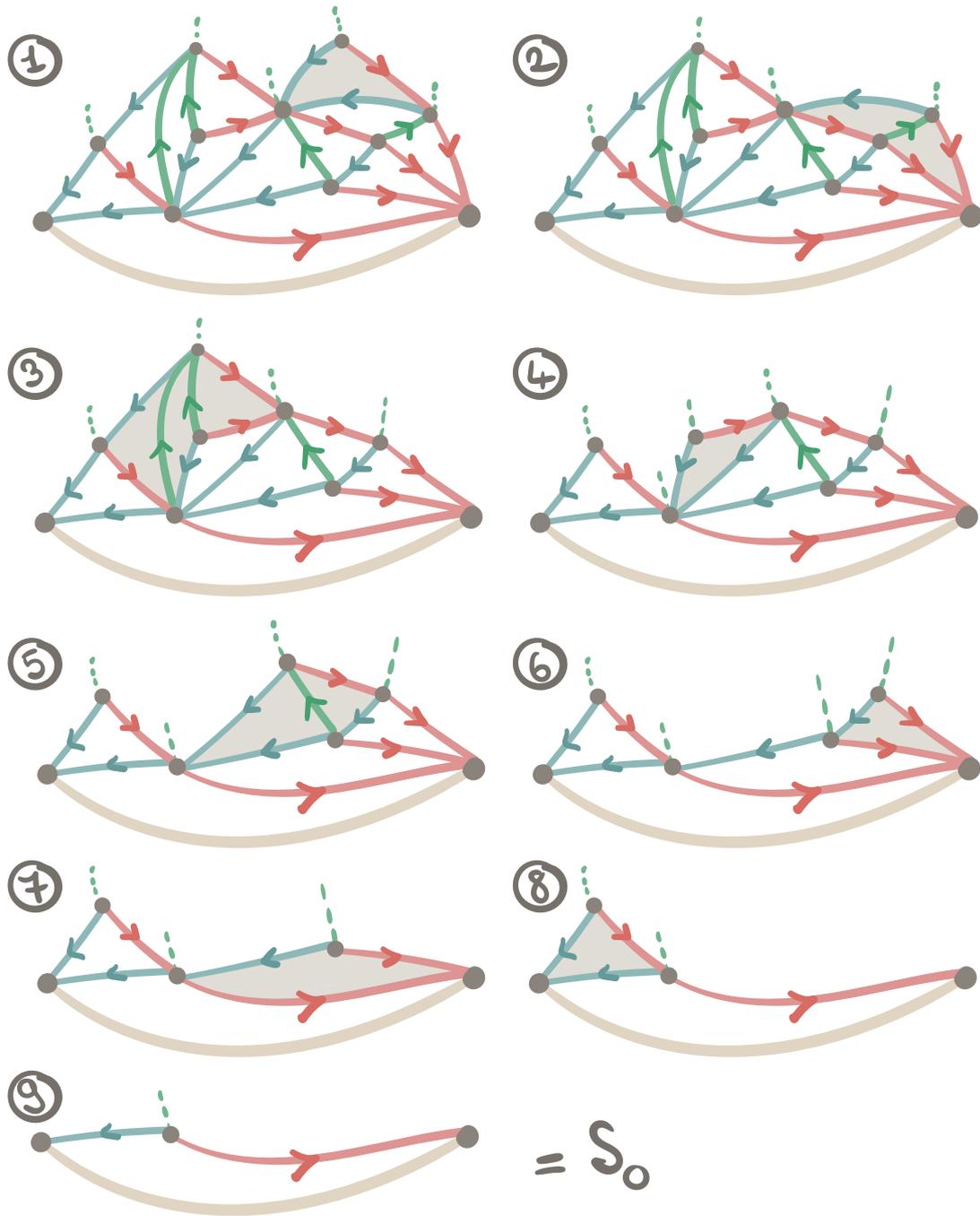


FIGURE 12 – Épluchage d'un bois de Schnyder partiel jusqu'à obtenir le bois S_0 . On a grisé à chaque étape la section minimale.

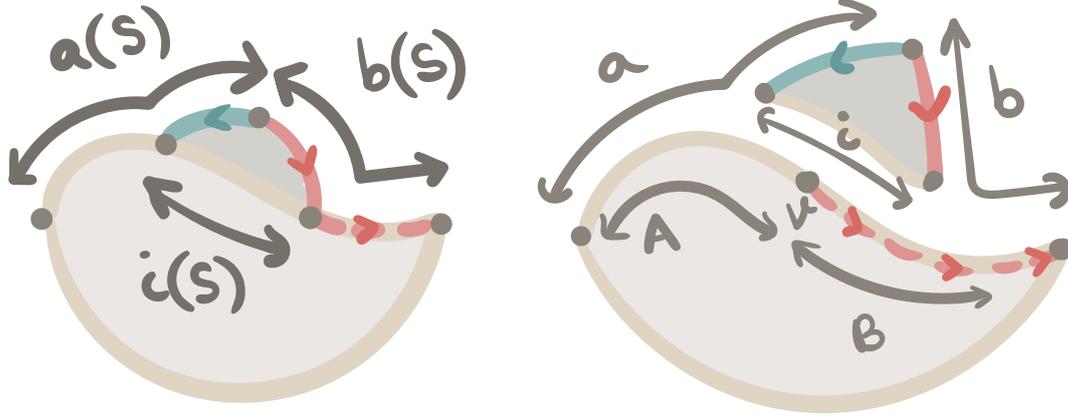


FIGURE 13 – Définition des grandeurs $a(S), b(S), i(S)$ et $\ell(S) = a(S) + b(S)$. Relations entre a, b, i et A, B dans l'épluchage.

C.2 Une équation fonctionnelle pour les bois de Schnyder

On sait d'ores et déjà compter les bois de Schnyder, on pourra par exemple trouver dans [Bon02] une preuve bijective qui permet de montrer que le nombre de bois de Schnyder à n sommets intérieurs se compte par $\text{Cat}(n+2) \text{Cat}(n) - \text{Cat}^2(n+1)$. Ici on cherche à obtenir une équation fonctionnelle à l'aide de l'épluchage proposé juste avant.

Soit \mathbf{S} la série génératrice multivariée des bois de Schnyder partiels donnée par :

S

$$\mathbf{S}(z; u, v) = \sum_{S \in \mathcal{S}} z^{\|S\|} u^{a(S)} v^{b(S)}$$

On va se servir de la relation de la règle de construction donnée à l'équation (1) pour démontrer l'équation fonctionnelle sur \mathbf{S} suivante.

Théorème C.2. *On a la relation fonctionnelle suivante sur la série génératrice \mathbf{S} :*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) = zuv + \frac{zuv}{(1-u)(1-v)} (\mathbf{S}(1, 1) - v\mathbf{S}(1, v)) \\ - \frac{zuv}{(1-u)(u-v)} (u\mathbf{S}(u, u) - v\mathbf{S}(u, v)) \end{aligned}$$

Démonstration. Le cas de base de la décomposition est le cas S_0 : on peut écrire la décomposition $\mathcal{S} = \{S_0\} \cup \mathcal{S} \setminus \{S_0\}$ et en coupant la somme en deux et composant par ψ^{-1} dans le second terme on a :

$$\mathbf{S}(u, v) = zuv + \sum_{S' \in \mathcal{S}} \sum_{S \in \psi^{-1}(S')} z^{\|S\|} u^{a(S)} v^{b(S)} \quad (2)$$

On note $\sigma(S')$ le terme général de la seconde somme et qui est le terme que l'on cherche maintenant à expliciter. On va noter A, B, K les valeurs de $a(S), b(S), \|S\|$, on déduit de

la règle de construction de l'équation (1) que l'on a :

$$\sigma(S') = \sum_{b=1}^{B+1} \sum_{i=1}^{A+B-b+1} u^{A+B+2} z^{K+1} \left(\frac{v}{u}\right)^b u^{-i} \quad (3)$$

On peut sortir les termes qui ne dépendent pas de b ou de i et sommer dans un premier temps sur i , on a :

$$\sigma(S') = \frac{u^{A+B+2} z^{K+1}}{1-u} \sum_{b=1}^{B+1} \left(\frac{v}{u}\right)^b \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{A+B+1-b} - 1 \right)$$

On peut découper $\sigma(S')$ pour faire apparaître deux sommes géométriques de raisons respectives v et v/u , on a alors :

$$\sigma(S') = \frac{z^{K+1} uv}{(1-u)(1-v)} (1 - v^{B+1}) - \frac{z^{K+1} u^{A+B+1} v}{(1-u)(u-v)} \left(u - v \left(\frac{v}{u}\right)^B \right) \quad (4)$$

On note $\sigma(S') = \sigma_1(S') - \sigma_2(S')$ l'écriture donnée par l'équation précédente, on veut injecter cette écriture dans l'équation (2), on calcule donc :

$$\begin{aligned} \sum_{S' \in \mathcal{S}} \sigma_1(S') &= \frac{zuv}{(1-u)(1-v)} \left(\sum_{S' \in \mathcal{S}} z^K - v \sum_{S' \in \mathcal{S}} z^K v^B \right) \\ &= \frac{zuv}{(1-u)(1-v)} (\mathbf{S}(1,1) - v \mathbf{S}(1,v)) \end{aligned} \quad (5)$$

On fait le même calcul pour le terme $\sigma_2(S')$, on obtient alors la formule suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{S' \in \mathcal{S}} \sigma_2(S') &= \frac{zuv}{(1-u)(u-v)} \left(u \sum_{S' \in \mathcal{S}} z^K u^{A+B} - v \sum_{S' \in \mathcal{S}} z^K u^A v^B \right) \\ &= \frac{zuv}{(1-u)(u-v)} (u \mathbf{S}(u,u) - v \mathbf{S}(u,v)) \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient bien le résultat annoncé en injectant les équations et dans la relation initiale (2), ce qui achève la démonstration. \blacklozenge

On remarque que l'équation obtenue nous permet déjà d'engendrer les premiers termes de la série génératrice. De plus des équations de ce type, à deux variable catalytiques, se sont déjà vus résolus dans quelques exemples récents de la littérature (voir [BBM15] par exemple), bien que ces équations ne soient seulement bien comprises que dans le cas d'une seule variable catalytique.

C.3 Épluchage des structures transverses

Dans cette partie, on présente une méthode pour éplucher les structure transverses et ainsi en déduire à nouveau une règle de génération. On s'inspire fortement de la méthode proposée par Éric Fusy dans [Fus06]. Plutôt que d'étudier directement les structures transverses, on se ramène à l'étude d'une structure transverse à laquelle on a retiré le coin N .

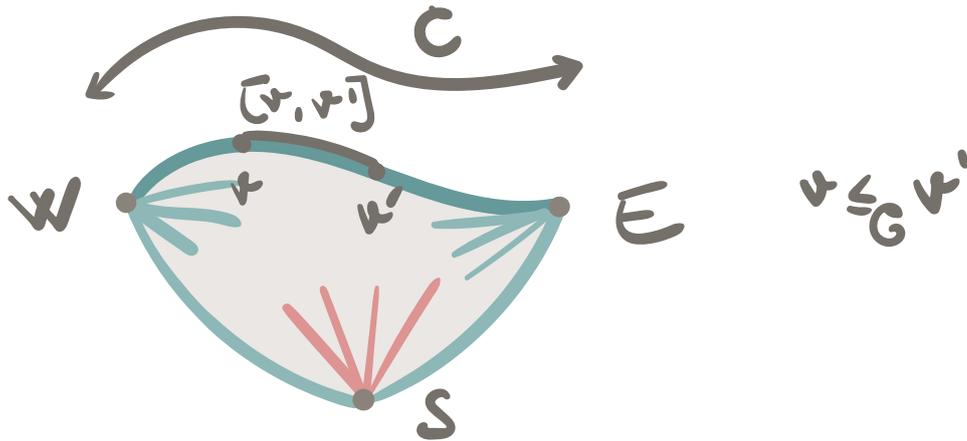


FIGURE 14 – Définition d’une structure transverse partielle, définition de W, E, S , de \mathcal{C} , de $[v, v']$ et de la relation d’ordre $\leqslant_{\mathcal{C}}$.

structure transverse partielles

On appellera *structure transverse partielle* une triangulation arête-coloriée sur {rouge, bleu} d’un n -gone (pour n supérieur ou égal à 4) telle que :

structure transverse partielle, \mathcal{C}

- Si \mathcal{C} est le bord de la face extérieure, alors \mathcal{C} est un cycle simple et il y a trois sommets consécutifs E, S, W distingués de \mathcal{C} tels que $\{E, S\}$ et $\{S, W\}$ soient coloriées en bleu.
- Tous les sommets à l’intérieur de \mathcal{C} soient localement causaux.
- Aucune arête à l’intérieur de \mathcal{C} ne relie deux sommets de \mathcal{C} .
- Les sommets E et W n’ont que des arêtes bleues et les arêtes intérieures de S sont toutes rouges.
- Si v, v' sont deux sommets de $\mathcal{C} \setminus \{S\}$ alors on notera $[v, v']$ le segment de $\mathcal{C} \setminus \{S\}$ qui relie v à v' . Alors, pour tout v dans $]W, E[$, le sommet v devient localement causal si on lui ajoute une demi-arête rouge vers la face extérieure et toutes les arêtes de $[W, E]$ sont bleues (voir figure 14).

$[v, v']$

On peut voir les structures transverses partielles comme des structures transverses auxquelles l’on aurait ôté le sommet N . Encore une fois, cette vue va justifier que si T est une structure transverse partielle on considérera tous les sommets de T hormis W, E, S dans le compte de $\|T\|$.

Si v, v' sont deux sommets de \mathcal{C} , on notera $v \leqslant_{\mathcal{C}} v'$ pour signifier que v est à gauche de v' , c’est-à-dire que v vient avant v' dans \mathcal{C} en allant de W vers E .

$\leqslant_{\mathcal{C}}$

Si v, v' sont deux sommets de $\mathcal{C} \setminus \{S\}$ tels que $v \leqslant_{\mathcal{C}} v'$ et si \mathcal{P} est un chemin d’arêtes intérieures qui relie v à v' , alors la paire $((v, v'), \mathcal{P})$ est dit *admissible* (voir figure 15) lorsque :

paire admissible

- Les chemins \mathcal{P} et $[v, v']$ sont de taille au moins 2 et le chemin \mathcal{P} est simple.

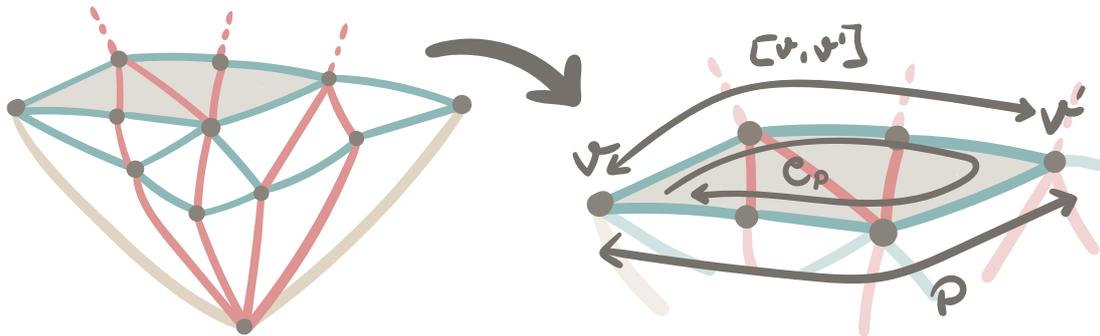


FIGURE 15 – Exemple d’une bande admissible, de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

- Si \mathcal{C}' est la face extérieure de la triangulation obtenue en retirant tous les sommets de $]v, v[$ alors aucune arête à l’intérieur de \mathcal{C}' ne relie deux sommets de \mathcal{C}' .
- Les arêtes de \mathcal{P} sont toutes bleues.
- Si on note $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ le cycle $[v, v'] \cup \mathcal{P}$, alors toutes les arêtes à l’intérieur de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ sont rouges.

$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$

On parlera aussi de *bande admissible*. Il est clair d’après définition qu’il n’y a aucun sommet dans l’intérieur d’une bande admissible.

bande admissible

On notera \mathcal{T} l’ensemble des structures transverse partielles, et si T est dans \mathcal{T} . S’il n’y a pas d’ambiguïté on utilisera les notations $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}_{\mathcal{P}}, N, W, E$ comme dans les définitions précédentes.

\mathcal{T}

On définit \mathcal{T}_I l’ensemble des structures transverses partielles qui sont réduites à une bande admissible, l’ensemble \mathcal{T}_I va nous servir de cas de base pour l’épluchage des structures transverses partielles.

\mathcal{T}_I

Proposition C.3. *Soit T une structure transverse partielle, alors T admet un couple admissible $((v, v'), \mathcal{P})$. Si T n’est pas dans \mathcal{T}_I alors la triangulation obtenue en retirant tous les sommets de $]v, v[$ est encore dans \mathcal{T} . On notera $\phi : \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_I \mapsto \mathcal{T}$ l’application qui retire une bande minimale.*

Démonstration. On définit pour commencer une notion affaiblie de *couple quasi-admissible*, on va ensuite prendre un bande quasi-admissible particulière qui se trouvera vérifier les bonnes conditions pour être admissible. On dira qu’un couple $((v, v'), \mathcal{P})$ est quasi-admissible si il vérifie les conditions suivantes :

quasi-admissible

- Les chemins \mathcal{P} et $[v, v']$ sont de taille au moins 2.
- Si \mathcal{C}' est la face extérieure de la triangulation obtenue en retirant tous les sommets de $]v, v[$ alors aucune arête à l’intérieur de \mathcal{C}' ne relie deux sommets de \mathcal{C}' .
- Les arêtes de \mathcal{P} sont toutes bleues.

L’existence d’une paire quasi-admissible est alors claire : le couple $((W, E), \{WS, SE\})$, par exemple, vérifie bien toutes les conditions ci-dessus. Maintenant que l’on sait qu’une

telle paire existe, on peut prendre une paire $((v, v'), \mathcal{P})$ telle que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ ne contienne aucune autre paire quasi-admissible $((w, w'), \mathcal{Q})$ (ie. telle que $\mathcal{C}'_{\mathcal{P}}$ soit contenu à l'intérieur de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$). Reste à montrer que cette paire est admissible, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ ne contient aucune arête bleue et que \mathcal{P} est simple.

Si par l'absurde $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ contient une arête bleue e , on peut construire un chemin bleu qui contient e et qui croise alors nécessairement $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ en deux points et qui définit une nouvelle paire admissible et contredit ainsi la minimalité de $((v, v'), \mathcal{P})$.

Pour la même raison \mathcal{P} est nécessairement simple : si \mathcal{P} contient un cycle on prend \mathcal{P}' le chemin où l'on a ôté le cycle et ceci définit une paire contenu strictement dans la paire que l'on a pris minimale. Ceci achève la preuve. \blacklozenge

Bande triangulée

Soient b, i deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On appellera *bande triangulée* une triangulation colorée du $(b + i)$ -gone de la forme suivante :

bande triangulée

- Le contour de la face extérieur est un cycle simple et se décompose en deux segments $B = v_0, \dots, v_b$ et $I = w_0, \dots, w_i$ de longueur respectives b et i . Le contour est donc de la forme $v_0, \dots, v_b = w_0, \dots, w_i = v_0$.
- toutes les arêtes à l'intérieur de la triangulation relient un sommet de B à un sommet de I .

Remarque. Étant donné une bande triangulée, les chemins I et B seront respectivement appelés le *bord haut* et *bord bas* de la triangulation. On notera \mathcal{B}_i^b dont le bord haut est de longueur b et le bord bas de longueur i ; le nombre de telles bandes est alors $\binom{b+i-4}{i-2}$.

\mathcal{B}_i^b

Remarque. Si T est dans \mathcal{T} , la région délimitée par $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ et ôtée à T est une bande triangulée dont le bord haut est $[v, v']$ et dont le bord bas est \mathcal{P} . On parlera indifféremment de paire admissible ou de bande admissible.

Bande minimale

À présent, on va proposer une règle de génération sur les structures transverses partielles en retirant à chaque étape une bande triangulée. Afin que le choix de la bande à extraire soit unique, on va introduire la notion de bande minimale. Soient $((v, w), \mathcal{P})$ et $((v', w'), \mathcal{P}')$ deux paires admissibles d'une structure transverse partielle T , on notera $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ et on dira que \mathcal{P} est à gauche de \mathcal{P}' lorsque $v \leq_C v'$ et $w \leq_C w'$.

$\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$

Lemme C.4. *La relation \leq donnée ci-dessus définit une relation d'ordre totale sur les bandes admissibles de T . Il existe donc une unique bande admissible minimale pour cette relation, que l'on appellera bande minimale.*

bande minimale

Démonstration. Soient $((v, w), \mathcal{P})$ et $((v', w'), \mathcal{P}')$ deux paires admissibles d'une structure transverse partielle T , on peut supposer sans perte de généralité que $v \leq_C v'$. Alors nécessairement on a $w \leq_C w'$ car sinon les chemins \mathcal{P} et \mathcal{P}' se croiseraient en un sommet x , de telle sorte que les arête (bleues) de \mathcal{P}' entre v' et x se retrouveraient à l'intérieur de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$, ce qui contredirait le caractère admissible de la paire $((v, w), \mathcal{P})$. Ceci justifie bien que \leq est un ordre total et achève la preuve. \blacklozenge

Épluchage

L'épluchage d'une structure transverse partielle consiste à retirer au fur et à la bande minimale de l'objet considéré. Comme le choix de la bande minimale est unique à chaque étape il est clair qu'il existe une seule suite de structures transverses partielles qui aille d'un élément de \mathcal{T} à un élément de \mathcal{T}_I , unique lui aussi. On présente un exemple d'un tel épluchage à la figure 16. Afin d'avoir une relation sur la série génératrice il nous faut détailler le chemin inverse : partant d'une structure transverse partielle dans \mathcal{T}_I quelles sont les manières de rajouter à chaque étape une bande triangulée qui devienne la nouvelle bande minimale ? Autrement dit si T est dans \mathcal{T} il s'agit d'explicitier $\phi^{-1}(T)$. Pour cela, on va rajouter des paramètres à notre modèle afin de connaître la position de l'ancienne bande minimale et de construire la nouvelle en fonction. Soit T une structure transverse partielle et $((v, v'), \mathcal{P})$ la bande minimale de T . On note $a(T)$ la longueur du chemin $[W, v]$, $b(T)$ la longueur du chemin $[v, v']$ et $c(T)$ la longueur du chemin $[v', E]$. On notera aussi $i(T)$ la longueur de \mathcal{P} (cf figure 17).

a, b, c
 i

On introduit $\mathcal{T}(N, k; A, B, C)$ l'ensemble des structures transverses partielles telles que $|T| = N$, que $\#V(T) = k$ et que $a(T) = A, b(T) = B, c(T) = C$. Soit maintenant T un élément de $\mathcal{T}(N, K; A, B, C)$ on cherche les paramètres n, k, a, b, c, i d'une structure obtenue en ajoutant une bande minimale à T (voir 17)

- On doit placer l'extrémité droite de la nouvelle bande de telle sorte que l'ancienne bande ne reste pas minimale, c'est-à-dire de telle sorte qu'elle ne soit à droite de la nouvelle bande. On a donc c compris entre 0 et $B + C - 1$.
- La taille du bas de la bande triangulée que l'on ajoute doit être supérieure ou égale à 2 et de telle sorte que le bord gauche de la bande ne se retrouve pas au delà de W . C'est-à-dire qu'il faut $c + 2 \leq c + i \leq A + B + C$.
- La longueur a est alors donnée par $a = A + B + C - c - i$.
- On doit ensuite choisir la longueur du bord haut de la bande triangulée ajoutée qui doit simplement être supérieure ou égale à 2.
- Enfin, étant donnés i et b il reste à choisir la bande triangulée de \mathcal{B}_i^b que l'on adjoint, il y en a $\binom{b+i-4}{i-2}$.
- On a alors ajouté les $b + i - 2$ triangles de la bande choisie, d'où $n = N + b + i - 2$. On a ajouté les $b - 1$ sommets sur la haut de la bande triangulée.

Finalement, au vu des conditions énoncées ci-dessus on a la règle de construction suivante :

$$\begin{aligned}
 T' &\in \mathcal{T}(N, K; A, B, C) \\
 &\mapsto T \in \mathcal{T}(N + b + i - 2, K + b - 1; A + B + C - c - i, b, c) \text{ et } B \in \mathcal{B}_i^b \quad (7) \\
 &\text{pour } 0 \leq c \leq C + B - 1 \text{ et } 2 \leq i \leq A + B + C - c \text{ et } b \geq 2
 \end{aligned}$$

C.4 Relation fonctionnelle sur les structures transverses partielles

À présent on va se servir de l'étude réalisée ci-dessus pour donner une équation fonctionnelle sur la série génératrice multivariée des structures transverses partielles \mathbf{T}

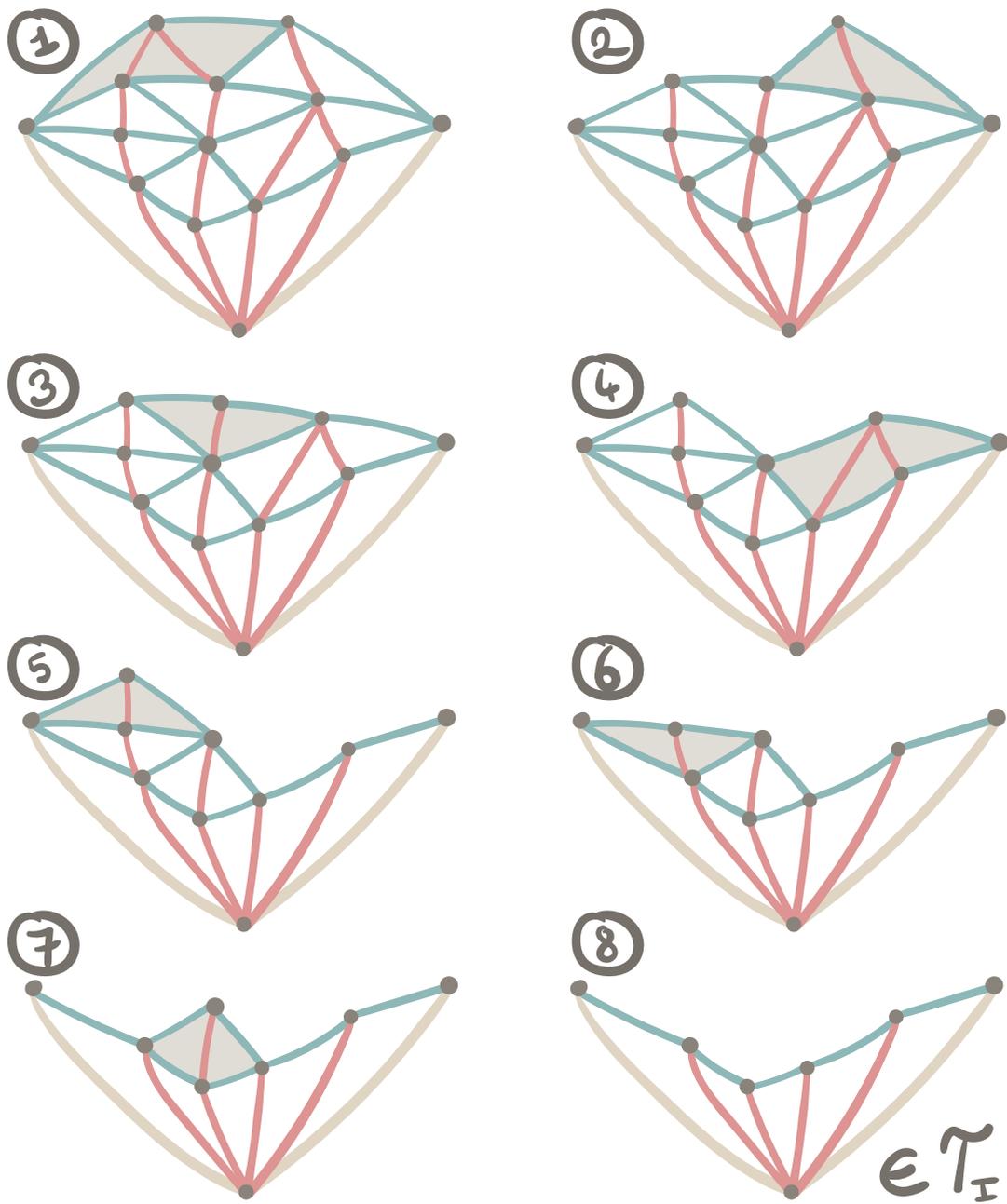


FIGURE 16 – Épluchage d’une structure transverse partielle jusqu’à tomber sur un élément de \mathcal{S}_I , on a grisé les bandes minimales.

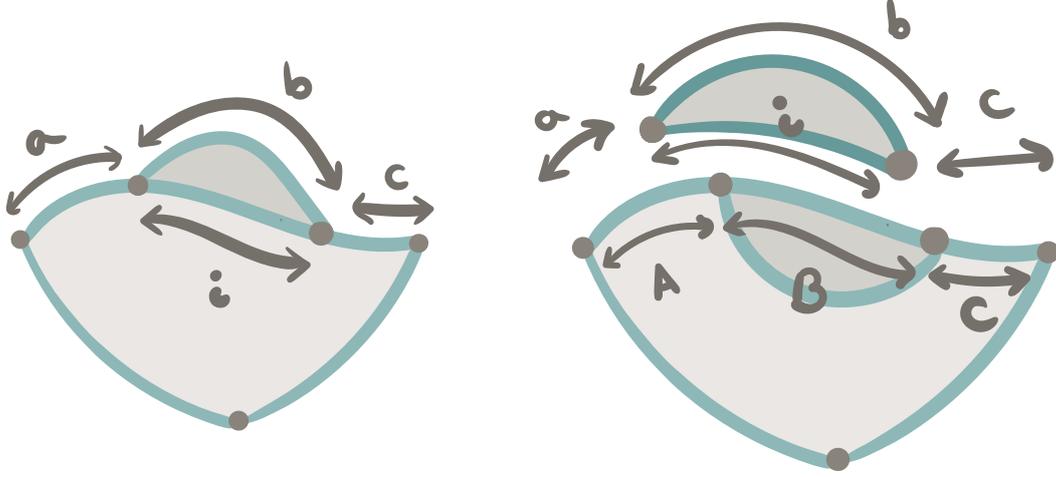


FIGURE 17 – Définition des grandeurs $a(T), b(T), c(T), i(T)$, paramètres d'une structure transverse partielle après l'ajout d'une nouvelle bande minimale.

donnée par :

$$\mathbf{T}(t, z; u, v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}} t^{|T|} z^{|T|} u^{a(T)} v^{b(T)} w^{c(T)}$$

où u, v, w seront des variables catalytiques.

Théorème C.5. On a l'équation fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{T}(u, v) = \frac{t^2 v^2 z}{1 - tvz} + \frac{v^2 q^2 z (1 - tvz)}{1 - q} \left(\frac{\mathbf{T}(u, u) - \mathbf{T}(u, v)}{1 - r} - \frac{\mathbf{T}(uq, uq) - \mathbf{T}(uq, v)}{q - r} \right)$$

où on a posé $q = \frac{t}{u(1-tvz)}$ et $r = \frac{v}{u}$.

Démonstration. On prend comme cas de base l'ensemble \mathcal{S}_I des structures transverses partielles composées d'une unique bande minimale, dont le chemin bas est donc de taille 2. On peut donc décomposer \mathbf{T} selon qu'il soit dans \mathcal{S}_I ou qu'il soit un antécédent par ϕ :

$$\mathbf{T}(u, v, w) = \sum_{T \in \mathcal{S}_I} t^{\#V(T)} z^{|T|} u^{a(T)} v^{b(T)} w^{c(T)} + \sum_{T' \in \mathcal{T}} \sum_{T \in \phi^{-1}(T')} t^{\#V(T)} z^{|T|} u^{a(T)} v^{b(T)} w^{c(T)}$$

La contribution de \mathcal{S}_I est $\frac{t^2 v^2 z}{1 - tvz}$, en notant $\sigma(T')$ la somme sur $\phi^{-1}(T')$, on peut réécrire :

$$\mathbf{T}(t, z; u, v, w) = \frac{t^2 z v^2}{1 - tvz} + \sum_{T' \in \mathcal{T}} \sigma(T') \quad (8)$$

On cherche à présent à calculer $\sigma(T')$. On notera A, B, C les valeurs de $a(T'), b(T'), c(T')$ et $N = |T'|$, $K = \#V(T')$. On pose aussi $L = A + B + C$. On déduit de l'équation (7)

que :

$$\sigma(T') = \sum_{c=0}^{C+B-1} \sum_{i=2}^{L-c} \sum_{b \geq 2} \binom{b+i-4}{i-2} t^{N+b+i-2} z^{K+b-1} u^{L-c-i} v^b w^c \quad (9)$$

On somme déjà sur b , en sortant les termes qui n'interviennent pas dans les sommes, on obtient déjà :

$$\sigma(T') = t^N z^{K+1} u^L v^2 (1-tzv) \cdot \sum_{c=0}^{C+B-1} \left(\frac{w}{u}\right)^c \sum_{i=2}^{L-c} \left(\frac{t}{u}\right)^i w^c \frac{1}{(1-tzv)^i}$$

On note $q = \frac{t/u}{(a-tzv)}$ la raison de la dernière somme et on somme sur i , on peut ensuite couper la dernière somme en deux pour obtenir :

$$\sigma(T') = t^N z^{K+1} u^L v^2 (1-tzv) \frac{q^2}{1-q} \cdot \left(\sum_{c=0}^{C+B-1} \left(\frac{w}{u}\right)^c - q^{L-1} \sum_{c=0}^{C+B-1} \left(\frac{w}{u}\right)^c \frac{1}{q^2} \right)$$

On peut enfin sommer sur c , on note $r = w/u$ et l'équation précédente devient :

$$\sigma(T') = t^N z^{K+1} u^L (1-tzv) \frac{q^2 v^2}{1-q} \cdot \left(\frac{1-r^{C+B}}{1-r} - q^{L-1} \frac{1-(r/q)^{C+B}}{1-r/q} \right) \quad (10)$$

On veut maintenant injecter l'expression de $\sigma(T')$ obtenue dans l'équation (10) dans l'expression de \mathbf{T} que l'on avait dans l'équation (8). On découpe la somme sur T' en quatre pour faire apparaître \mathbf{T} . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t, z; u, v, w) = \frac{t^2 z v^2}{1-tzv} + \frac{v^2 q^2 (1-tzv)}{1-q} & \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}} \frac{t^N u^L}{1-r} - \sum_{T' \in \mathcal{T}} \frac{t^N u^L r^{C+B}}{1-r} \right. \\ & \left. - \sum_{T' \in \mathcal{T}} \frac{t^N q^L u^L}{q-r} + \sum_{T' \in \mathcal{T}} \frac{t^N (uq)^L (r/q)^{C+B}}{q-r} \right) \end{aligned}$$

On peut alors identifier les quatre termes dans la sommes à des évaluations en \mathbf{T} , cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(u, v, w) = \frac{t^2 z v^2}{1-tzv} + \frac{v^2 q^2 (1-tzv)}{1-q} & \left(\frac{\mathbf{T}(u, u, u) - \mathbf{T}(u, w, w)}{1-r} \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{T}(uq, uq, uq) - \mathbf{T}(uq, w, w)}{1-r} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient alors en posant $v = w$ dans l'équation (11). \blacklozenge

Encore une fois, on remarque que l'équation obtenue permet de générer les premiers termes des structures transverses, qui correspondent au choix $u = w = 0$ et $v = 1$. On a présenté dans le tableau à la figure 18 les cents premiers termes de la série en la variable t .

Il n'existe pas de formule close connue pour compter les structures transverse, cependant la forme similaire des deux équations permet d'espérer pouvoir trouver des résultats asymptotiques sur le nombre de structures transverses.

1	0	51	152976622542191568826
2	1	52	521117470420062254920
3	1	53	1550139325411488341026
4	2	54	5296247547699704019077
5	2	55	15853916649347388334936
6	4	56	54317758862432001573832
7	5	57	163556063607702165524756
8	12	58	561833608564983666032142
9	18	59	1701097134748294129210782
10	48	60	5857879718900029524290816
11	83	61	17828434331718711865449945
12	231	62	61536805822352758348208567
13	440	63	188203092808719166172325114
14	1263	64	651034572375755842914451908
15	2582	65	2000294895362822070781348602
16	7600	66	6933882415416367695633474166
17	16419	67	21397048428048556769324720366
18	49345	68	74318175352046461607072024900
19	111497	69	230281015869812376301836302969
20	340888	70	801336933268570840172616540495
21	799653	71	2492701654810515485692607836033
22	2480117	72	8689674480939331115674923138270
23	6005385	73	27130904011422425599558547028835
24	18854968	74	94740759830911051445225057724441
25	46913583	75	296840601877745114414007970249209
26	148865962	76	1038248013035484914238488787223048
27	379228833	77	3263917393654465132129178310560184
28	1214631040	78	11433793483612375626577277792386346
29	3158752424	79	36058796464982006270576469060257320
30	10200981212	80	126504539328769335651459330255890673
31	27017082938	81	400171218836104468817966539405232685
32	87895090531	82	1405907343462788489233944033688361300
33	236603566381	83	4460213854306864953558576354051787093
34	774864302050	84	15691214200199415083361029590972087271
35	2116480741769	85	49918224915196032286295480987312471117
36	6973071201671	86	175843250925661263437955022141146386101
37	19298597346754	87	560892804205190034933698624494974051636
38	63930355390998	88	1978287099707890099152051401110007183946
39	179056806037358	89	6326250174985722752410462192968377298118
40	596130824308349	90	22339695217705494395850813973986786650624
41	1687906529214152	91	71612939727621792242340792973407102044300
42	5645367660197845	92	253176638208115465922972592686481194471711
43	16144422402768951	93	813490016503705965908790772152170319661556
44	54225642325301622	94	287916516775072855778191347722548078752647
45	156497794819085024	95	9271910056981086184775478872887661528166190
46	527706069820528239	96	32850943201739518367025336499501669027127359
47	1535889951746264648	97	106019697727966254999313774405449924124263184
48	5197855762045873860	98	376021370090065689057254688902696668081029825
49	15246953988047094392	99	1216050392081172684771493503459838559541908419
50	51774875207922123711	100	4317266362588028744926610501849088661750291159

FIGURE 18 – Nombre de structures transverses (seconde colonne) en fonction du nombre de triangles (première colonne).

Conclusion

On a exhibé dans les théorèmes C.2 et C.5 des équations fonctionnelles sur les séries génératrices \mathbf{S} et \mathbf{T} des bois de Schnyder partiels et structures transverses partielles. On remarquera que des informations sur ces objets là nous permettent bien de trouver des résultats sur les objets initiaux de note étude : retrouver la classe des bois de Schnyder revient à poser $u = v = 1$ (*ie.* de laisser a et b libres) dans l'expression de \mathbf{S} et pour retrouver les structures transverses il suffit de prendre $u = w = 0$ et $v = 1$ ($a = c = 0$ et b libre).

Maintenant il serait souhaitable de se servir des équations fonctionnelle obtenues afin de trouver une expression pour les séries génératrices. Dans la suite, pour résoudre ce problème on essayera sans doute d'utiliser la *méthode du noyau* qui s'est déjà montrée utile sans la résolution de telles équation fonctionnelles bivariées, voir par exemple [BBM15].

Bibliographie

- [BBM15] Olivier Bernardi and Mireille Bousquet-Mélou. Counting coloured planar maps : differential equations, 2015.
- [Bon02] Nicolas Bonichon. *Aspects algorithmiques et combinatoires des réalisateurs des graphes plans maximaux*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2002.
- [dM94] Patrice Ossona de Mendez. *Orientations bipolaires*. PhD thesis, Paris, 1994.
- [Fel04] Stefan Felsner. Lattice structures from planar graphs. *Electronic Journal of combinatorics*, 2004.
- [Fus06] Eric Fusy. Transversal structures on triangulations : a combinatorial study and straight-line drawings, 2006.
- [Fus07] Eric Fusy. *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*. PhD thesis, LIX, Ecole Polytechnique, 6 2007.
- [LR15] Renate Loll and Ben Ruijl. Locally causal dynamical triangulations in two dimensions. 2015.