



Énumération de cartes décorées et marches dans le quart de plan

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°626 École doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (EDIPP)
Spécialité de doctorat : Informatique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 23 septembre 2022, par

ERKAN NARMANLI

Composition du Jury :

Gilles Schaeffer Directeur de recherche, CNRS (LIX)	Directeur de thèse
Éric Fusy Directeur de recherche, CNRS (LIGM)	Directeur de thèse
Jéréemie Bouttier Directeur de recherche, CEA (IPhT)	Rapporteur
Daniel Gonçalves Chargé de recherche, CNRS (LIRMM)	Rapporteur
Mireille Bousquet-Mélou Directrice de recherche, CNRS (LaBRI)	Présidente
Marie Albenque Chargée de recherche, CNRS (LIX)	Examinatrice
Nicolas Bonichon Maître de Conférence, Université de Bordeaux (LaBRI)	Examineur
Stefan Felsner Professeur des Universités, Technische Universität Berlin (Institut für Mathematik)	Examineur

À Denis Blondel (1956-2012)
Qui m'a fait découvrir ces mondes enchantés

Remerciements

En tout premier lieu, mes remerciements les plus sincères vont à Gilles et Éric, mes directeurs de thèse. Merci déjà pour tous vos encouragements, pour votre patience, et pour tous vos conseils - scientifiques ou non - et qui m'ont guidé à travers ces trois années, avec une authentique bienveillance. Merci aussi de m'avoir accompagné sur ce sujet passionnant et de m'avoir transmis votre enthousiasme pour les questions liées aux cartes. Je n'aurai pas pu imaginer de meilleurs encadrants que vous deux ; je vous dois beaucoup.

Merci à mes rapporteurs, Jérémie Bouttier et à Daniel Gonçalves, d'accepter de relire ma thèse pendant votre été ; je vous imagine volontiers vous y atteler à la plage et sous le parasol, à grincer des dents devant les nombreuses fautes d'accord. Merci également à Mireille Bousquet-Mélou, Marie Albenque, Nicolas Bonichon, et Stefan Felsner de bien vouloir faire partie de mon jury. Je vous suis reconnaissant à tou-te-s pour le temps que vous consacrez à mon travail.

C'était un plaisir de faire ma thèse au LIX^a au sein de l'équipe Combi (avec Lucas, Vincent, Jérémie) et de profiter de toutes ces discussions stimulantes, souvent devant un tableau mais toujours autour d'un café. Merci tout particulièrement à Marie pour sa motivation sans faille, son engagement et son énergie, et pour qui il me faut avouer mon admiration. J'ai aussi été heureux de rencontrer mon petit frère de thèse Zéphyr qui fait preuve d'une sincérité constante, qui force le respect. Je suis également très reconnaissant à Évelyne, Helena et Vanessa, sans qui je me serais sans doute retrouvé constamment perdu dans les limbes administratives. Du côté des enseignements, je dois remercier mes élèves, de colle ou de TD, qui se portent volontiers cobayes pour des exercices expérimentaux mais qui affûtent toujours notre pédagogie.

Merci à Guillem Perarnau, Oriol Serra, Alice Joffard, Ruanjo Rué de m'avoir accueilli à l'UPC à Barcelone, et surtout de m'avoir laissé rentrer en France à vélo. Merci à Benjamin Girard, Omid Amini, Raphaël Cerf et à tou-te-s les autres qui, bien avant ma thèse, m'ont fait confiance et m'ont fait découvrir la combinatoire. Je suis persuadé qu'aucun autre domaine n'aurait su me motiver autant que celui-ci. Plus généralement, je dois dire ma gratitude à l'ensemble de la communauté ALEA, qui m'a accueilli très chaleureusement aux journées thématiques, après deux années de thèse passées sous la cloche du Covid. Il n'y avait rien de mieux pour racheter les éditions annulées que le karaoké des journées ALEA, à chanter du Kyo à tue-tête comme un adolescent.

Merci à Martin pour toutes nos chouettes discussions mathématiques au Burô ou en K-Fêt^b. Merci à Louise, Laure, Max et Steph' de vous être assuré-e-s que mon

a. Malgré les 2h30 de trajet aller-retour pour s'y rendre.

b. Et bientôt sur le nouveau tableau de la Cooloc'.

introduction savait être lisible pour des humain·e·s sensé·e·s. Merci à Alexandra Elbakyan pour Sci-Hub. Merci à Albane Trémau pour m'avoir aidé à remplir mes contrats d'études, quand je ne savais pas trouver le bouton « Enregistrer ». Merci à tout SPB2 pour votre bonne humeur et pour m'avoir appris à me lever à 7h le matin^c. Merci à mon sac de couchage qui m'a tenu chaud à mon bureau pendant plusieurs mois de rédaction cet hiver^d.

Bien entendu, je n'oublie pas toutes celles et ceux avec qui j'ai partagé de chouettes moment et qui ont grandement contribué à enrichir ces trois belles années. Merci à mes parents, qui continuent à me suivre et à m'encourager depuis si longtemps. Merci à mon petit frère, qui se trouve être un modèle beaucoup plus souvent qu'il ne le croit. Je suis heureux de voir notre relation continuer à se construire et à évoluer ; elle m'est très précieuse. Merci également à ma nouvelle famille, ceux qui sont ou sont passé·e·s à la Cooloc', pour le camembert pané mais aussi pour la chaleur de votre camaraderie^e. Au groupe des Vieux de la Vieille, et à la fidélité de votre amitié et de votre affection, à tous nos verres et tous nos repas^f passés ou à venir. Aux Nightlineu·r·se·s, qui, sans être reconnu·e·s, se reconnaîtront pour les chouettes moments en perm' ou dans l'orga, et pour l'énergie indéfectible que vous mettez au service des autres. À tout le réseau de colocs — colocou, plantation, ISS — pour les beaux moments de liesse passés avec vous. Merci également à toutes les compagnies de théâtre avec lesquelles il m'a été donné de travailler — Chapitre treize, Rise Up, les Engivaneur·se·s, À la fin il meurt — pour la magie dont vous seul·e·s avez le secret.

À mes ami·e·s et à celles et ceux qui ont fait un bout de route avec moi, vous qui me faites ou m'avez fait grandir, à vous toutes et tous, je dois vous dire que je me sens très chanceux.

Enfin merci à Math'. Pour les jolis dessins ; et pour tout le reste.

c. Tenu sur les trois derniers mois de ma thèse, je trouve que c'est un bon score !

d. Hausse du prix du gaz oblige.

e. Qui réchauffe bien mieux que le bouclier tarifaire.

f. Toujours croquants-gourmands, bien-sûr !

Table des matières

Remerciements	5
Prélude	5
Table des matières	7
Introduction	11
Présentation des modèles et état de l'art	21
Notations et vocabulaire	21
I Cartes planes	22
I.1 Définitions et premières propriétés	22
I.2 Quelques constructions remarquables sur les cartes	23
I.3 Combinatoire des cartes planes	25
II Orientations bipolaires planes	26
II.1 Définitions et premières propriétés	26
II.2 Principaux résultats et énumération	28
III Les structures combinatoires de notre étude	29
III.1 Orientations bipolaires planes biparties	29
III.2 Présentation des posets plans	31
III.3 Présentation des bois de Schnyder triangulés	32
III.4 Présentation des structures transverses	34
III.5 Présentation des orientations polyédrales	35
III.6 Présentation des étiquetages de Schnyder	38
III.7 Présentation des permutations planes	42
IV Combinatoire des modèles de cartes décorées considérés	45
IV.1 Résultats de comptage exacts ou asymptotiques	45
IV.2 Lien avec des polyèdres en coin	46
IV.3 Lien avec les systèmes de contact	52
IV.4 Algorithmes de dessin	55
V Marches tandems et bijection KMSW	61
V.1 Définitions et énoncé de la bijection KMSW	61
V.2 Description de la bijection et propriétés	62
VI Énumération asymptotique des marches contraintes	67
VII Autres outils combinatoires	68
VII.1 Un critère de rationalité	68
VII.2 Un calcul de mots à séparateurs	68
A Bijection des modèles avec des orientations bipolaires planes déco- rées	69
A.1 Bijection des posets plans avec les orientations bipolaires V-transverses	71
A.1.1 Définition des orientations bipolaires V-transverses et mise en bijection	71

A.1.2	Description de la bijection Φ_V	73
A.1.3	Démonstration de la Proposition A.1	75
A.2	Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les orientations bipolaires W-admissibles	77
A.2.1	Définition des orientations bipolaires W-admissibles et mise en bijection	77
A.2.2	Description de la bijection Φ_W	79
A.2.3	Démonstration de la Proposition A.2	81
A.3	Bijection des structures transverses avec les orientations bipolaires T-transverses	84
A.3.1	Définition des orientations bipolaires T-transverses et mise en bijection	85
A.3.2	Description de la bijection Φ_T	86
A.3.3	Démonstration de la Proposition A.3	87
A.4	Bijection des orientations polyédrales avec les orientations bipolaires P-admissibles	90
A.4.1	Définition des orientations bipolaires P-admissibles et mise en bijection	90
A.4.2	Description de la bijection Φ_P	92
A.4.3	Démonstration de la Proposition A.4	93
A.5	Bijection des étiquetages de Schnyder avec les orientations bipolaires S-transverses	99
A.5.1	Définition des orientations bipolaires S-transverses et mise en bijection	100
A.5.2	Description de la bijection Φ_S	103
A.5.3	Démonstration de la Proposition A.6	104
B	Bijection des orientations bipolaires décorées avec des marches tandems dans le quart de plan	109
B.1	Introduction des marches tandems décorées	110
B.2	Bijection des posets plans avec les marches tandems E-admissibles ...	111
B.3	Bijection des posets plans avec les marches tandems V-admissibles ...	113
B.3.1	Définition des marches tandems V-admissibles et mise en bijection	113
B.3.2	Description de Ψ_V et démonstration de la Proposition B.2	114
B.4	Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les marches tandems W-admissibles	116
B.5	Bijection des structures transverses avec les marches tandems T-admissibles	119
B.5.1	Définition des marches tandems T-admissibles et mise en bijection	119
B.5.2	Description de Ψ_T et démonstration de la Proposition B.4	120
B.5.3	Restriction de Ψ_T aux structures transverses triangulées	121
B.6	Bijection des orientations polyédrales avec les marches tandems P-admissibles	122

B.6.1	Définition des marches tandems P-admissibles et mise en bijection	123
B.6.2	Description de Ψ_P et démonstration de la Proposition B.5	124
B.7	Bijection des étiquetages de Schnyder avec les marches tandems S-admissibles	124
B.7.1	Définition des marches tandems S-admissibles et mise en bijection	125
B.7.2	Description de Ψ_S et démonstration de la Proposition B.6	126
B.7.3	Spécialisation de Ψ_S aux bois de Schnyder triangulés	127
C	Énumération exacte des différents modèles de cartes décorées	133
C.1	Une équation maîtresse pour les marches tandems	135
C.2	Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes	136
C.2.1	Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par arêtes	136
C.2.2	Déduction d'une bijection entre les posets plans comptés par arêtes et des marches à petits pas	136
C.3	Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre de sommets	139
C.3.1	Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par leur nombre de sommets	139
C.3.2	Lien avec les permutations planes	139
C.4	Énumération exacte des bois de Schnyder triangulés	140
C.5	Énumération exacte des structures transverses	142
C.5.1	Application de l'équation maîtresse aux structures transverses	142
C.5.2	Bijection des structures transverses avec des marches à petits pas	144
C.5.3	Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les structures transverses	146
C.6	Énumération exacte des orientations polyédrales	147
C.6.1	Bijection des orientations polyédrales avec des marches à petits pas	147
C.6.2	Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les orientations polyédrales	149
C.7	Énumération exacte des étiquetages de Schnyder	151
C.7.1	Bijection des étiquetages de Schnyder avec des marches à petits pas	151
C.7.2	Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les étiquetages de Schnyder	152
C.7.3	Raffinements, et comptage des polyèdres en coin rigides	154
D	Comptage asymptotique des modèles de cartes décorées	159
D.1	Équivalent asymptotique pour les posets plans et les structures transverses	160
D.1.1	Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes	160

D.1.2	Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre de sommets	162
D.1.3	Énumération asymptotique des structures transverses	163
D.2	Taux de croissance exponentiel des orientations polyédrales	166
D.2.1	Preuve de la borne supérieure $p_n \leq (9/2)^n$	167
D.2.2	Minoration de la limite inférieure : $\liminf p_n^{1/n} \geq 9/2$	167
D.2.3	Conjecture d'un équivalent asymptotique pour p_n	171
D.3	Taux de croissance exponentiel des étiquetages de Schnyder	172
D.3.1	Preuve de la borne supérieure $s_n \leq 2 \cdot (16/3)^n$	172
D.3.2	Minoration de la limite inférieure : $\liminf s_n^{1/n} \geq 16/3$	174
D.3.3	Conjecture d'un équivalent asymptotique pour s_n	177
E	Bijection entre posets plans et permutations planes	181
E.1	Description de la bijection	182
E.2	Démonstration que $h \circ g = \text{Id}$	183
E.3	Réciprocité de g et h à l'aide d'arbres de génération	186
E.3.1	Caractérisation des points actifs	186
E.3.2	Arbre de génération pour les posets plans	187
E.3.3	Comparaison des points actifs sur les arbres de génération	191
	Conclusion	195
	Annexes	198
	Bibliographie	198
	Index des notions	205
	Index des symboles	207

Introduction

À la banale question « Et vous, que faites-vous dans la vie ? » de répondre avec un grand sourire « Des mathématiques ! » fige rapidement sur son interlocutrice une moue circonspecte et une envie irréprouvable de quitter la conversation^g. C'est que le grand sourire ne suffit généralement pas à faire oublier à la personne en face de vous, ses années laborieuses de collège ou de lycée, quand les mathématiques jouaient le rôle d'un tortionnaire cruel et sadique, qui l'écrasait sous des couches d'abstractions pour lui faire crier son désespoir : « Je ne comprends pas ! ». Mais c'est justement le moment de sortir un stylo et de dessiner, sur le coin d'une serviette, un graphe et deux cartes planes associées, pour rendre le sourire à votre camarade et parfois même susciter chez elle-lui l'envie de manipuler ce nouvel objet ludique. Si cette introduction aspire à aller un peu plus loin qu'une initiation sommaire, j'espère qu'elle saura aussi contenter la curiosité de quelques profanes.

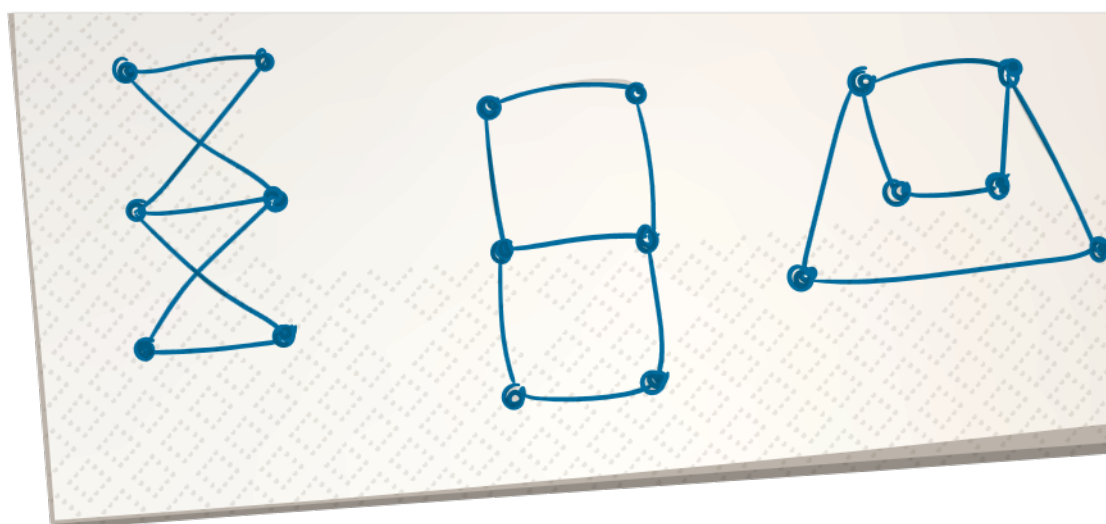


FIGURE 1 – Un coin de serviette.

Vous avez dit « cartes planes » ? Pour celles et ceux qui découvrent les cartes planes en même temps que ces lignes je dis donc : qu'une *carte plane* est la donnée d'un *graphe* (des sommets reliés entre eux par des arêtes) et de sa représentation sur le papier. En outre, deux cartes sont considérées identiques lorsqu'on peut passer *continûment* de l'une à l'autre. Aussi, dans la figure 1, les deux dessins au centre et à droite représentent deux cartes issues d'un même graphe (à gauche). Ces deux cartes sont *différentes* parce qu'il n'est pas possible de passer de l'une à l'autre

^g. À moins que votre interlocutrice fasse iel même des mathématiques, auquel cas je peux vous recommander de varier un peu vos rencontres !

sans que des arêtes ne se croisent, à un moment, pendant cette entreprise^h. L'ajout essentiel des cartes sur les graphes, c'est la notion de *faces* (les régions de papier entourées par leurs clôtures de sommets et d'arêtes), qui traduit la rigidité nouvelle des cartes sur les graphes. La *face extérieure* est alors la seule région infinie, celle qui s'étend jusqu'au bord de notre serviette en papier (et même théoriquement au-delà).

Aussi, cette définition intuitive (certains diront *naturelle*) des cartes planes induit des applications dans de nombreux champs des mathématiques et même au-delà en physique théorique et en biologie. En infographie, par exemple, les cartes se sont imposées comme une structure de donnée centrale pour manipuler les maillages et les représenter efficacement. En physique statistique, les cartes servent à discrétiser des surfaces bidimensionnelles pour mettre en évidence des phénomènes de transition de phase. En biologie, elles peuvent intervenir dans les représentations des structures secondaires des acides nucléiques (ADN/ARN).

Dans les années 60, quand il formalise la notion de cartes, W. Tutte a alors pour ambition de démontrer le théorème des quatre couleurs. Son énoncé se résume ainsi : il est possible de colorier les sommets de toute carte plane avec seulement quatre couleurs, et de telle sorte que deux sommets qui partagent une arête n'aient jamais la même couleur (voir figure 2). Si Tutte n'arrivera jamais à démontrer ce



FIGURE 2 – Le théorème des quatre couleurs : on peut colorier une carte avec au plus quatre couleurs et en faisant en sorte que deux pays (resp. sommets) qui sont voisins ne soient pas de la même couleur.

résultatⁱ, il laissera en héritage des méthodes de décompositions (dites à *la Tutte*)

h. Ce qui n'est pas le cas sur la sphère, où il serait possible de passer continûment de l'une à l'autre. Aussi ces deux représentations définissent deux cartes planes différentes mais deux fois la même *carte planaire*.

i. Celui-ci sera démontré avec l'assistance d'un ordinateur dans un article en deux parties dû à K. Appel et W. Haken, et qui fait près de 800 pages [AH89]!

pour plusieurs familles de cartes planes dans sa série d'articles des *censuses*^j. La méthode de décomposition de Tutte consiste à *éplucher* une carte plane, en lui ôtant, un à un, récursivement, ses sommets, ses faces ou encore ses arêtes. Ces méthodes constituent encore aujourd'hui la clef de voûte pour énumérer des familles de cartes planes.

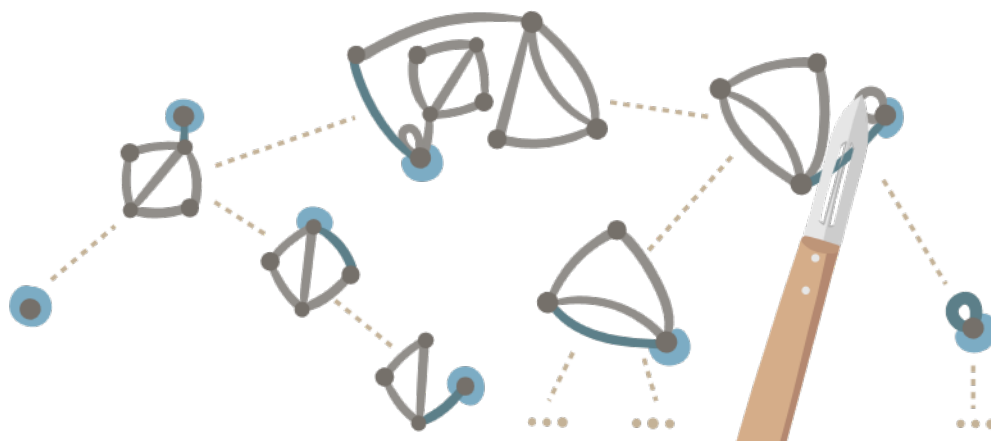


FIGURE 3 – L'économe de Tutte.

L'art de compter des objets mathématiques En combinatoire, la question de l'énumération exacte se pose ainsi : « Pour un n donné, combien y a-t-il d'objets de taille n ? ». Transposé à notre objet d'étude, il s'agit par exemple de se demander quel est le nombre m_n de cartes planaires^k ayant n arêtes (voir figure 4) ; ou encore : quel est le nombre de triangulations (cartes dont toutes les faces sont des triangles) ayant n faces ? L'énumération asymptotique, quant à elle, cherche à comprendre le comportement... asymptotique du nombre d'objets de taille n , *e.g.* quel est l'équivalent de m_n quand n tend vers l'infini ? Est-ce que ça grossit vite ? Oui, mais vite comment ?

Aussi, si l'énumération des cartes planes ou planaires est aujourd'hui bien connue, il est remarquable de voir apparaître un phénomène d'universalité asymptotique : la plupart des familles de cartes (par exemple les triangulations) de taille n voient leur asymptotique se comporter en $\kappa \cdot \gamma^n n^{-5/2}$. Seules quelques familles de cartes dites *pathologiques* (comme les arbres plans) ont un équivalent asymptotique de la forme $\kappa \cdot \gamma^n n^{-3/2}$.

j. *A census of hamiltonian polygons* [Tut62a], *A census of triangulations* [Tut62b], *A census of slicings* [Tut62c], *A census of planar maps* [Tut63].

k. Plongées sur la sphère, donc.

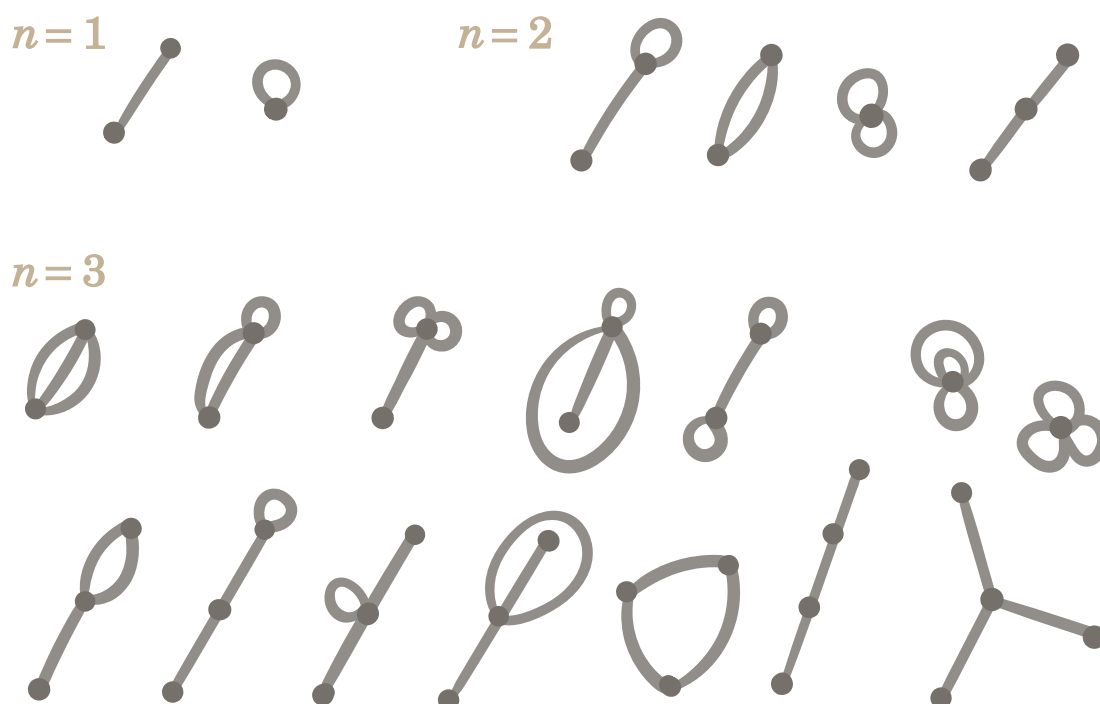


FIGURE 4 – Les 2 cartes (planaires) avec une arête, les 4 cartes avec deux arêtes, les 14 cartes avec trois arêtes¹. La suite m_n des cartes planaires à n arêtes commence comme suit : 2, 4, 14, 52, 248, 1416, 9172, 66366, 518868, ...

La décoration, avec du sens et de la couleur L'étude des *cartes planes décorées* semble, elle, plus compliquée mais est fortement motivée par des considérations algorithmiques ou de physique statistique. Ces décorations peuvent prendre plusieurs formes, il peut très bien s'agir d'une orientation des arêtes de la carte, ou bien d'une coloration contrainte des sommets (voir par exemple figure 5). On peut encore imaginer décorer une carte à l'aide d'un arbre couvrant, un chemin auto-évitant, une configuration de modèle d'Ising, etc.

En algorithmique, par exemple, les colorations contraintes de cartes permettent d'assigner aux sommets des coordonnées naturelles dans le plan et réalisent les algorithmes fournissant des dessins de graphes les plus compacts connus [He93 ; BFM07]. En physique statistique, le modèle des *triangulations causales* (une classe de triangulations aux arêtes coloriées) fait l'objet d'une attention croissante et fournit aujourd'hui des pistes sérieuses pour essayer de rapprocher la théorie quantique et la théorie de la relativité générale. Les travaux récents de R. Loll et de B. Ruijl [LR15] étendent cette famille de cartes aux *triangulations dynamiques localement causales* et dont la description est très similaire aux *structures transverses*, qui sera l'un des objets de notre étude. Dans ce dernier modèle de triangulations causales, les faisceaux successifs d'arêtes entrantes rouges, entrantes bleues, sortantes rouges, sortantes bleues, permettent alors de décrire le cône de lumière relativiste (voir

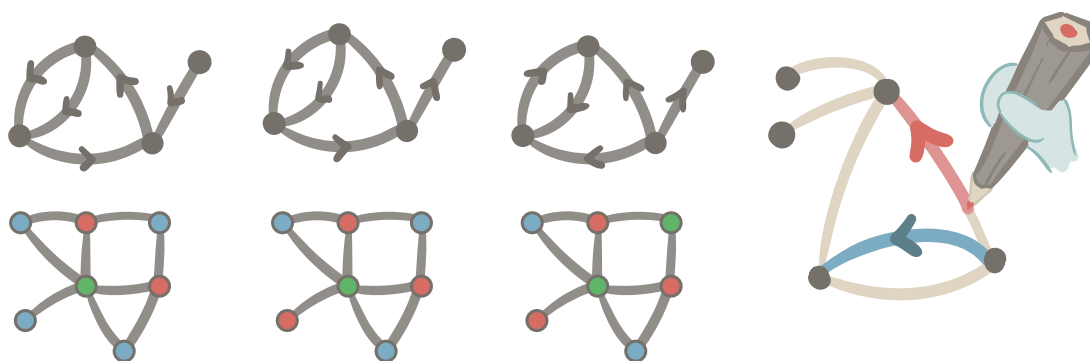


FIGURE 5 – Des cartes décorées. La règle sur la coloration contrainte des sommets est que deux sommets qui partagent une arête doivent être de couleurs différentes.

figure 6).

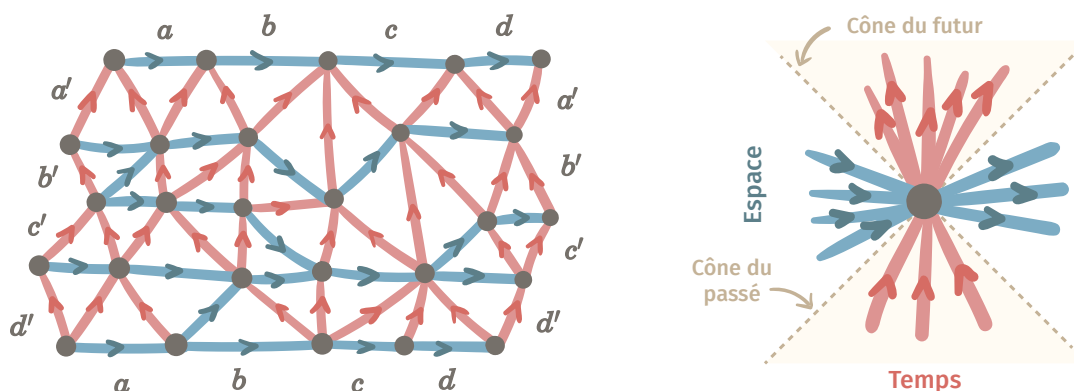


FIGURE 6 – Une triangulation dynamique localement causale (à gauche); la carte est plongée dans un tore et on peut identifier les arêtes a, b, c, d en haut et en bas (de même pour les arêtes a', b', c', d'). La représentation locale du cône de lumière (à droite).

Plus généralement, les cartes décorées apparaissent naturellement comme les types combinatoires de nombreux objets géométriques et permettent d'encapsuler efficacement leurs propriétés topologiques. C'est le cas des *polyèdres en coin*, des polyèdres qui peuvent être vus comme un entassement de cubes dans un coin, à déformation continue près. Cette famille de polyèdres peut être décrite à l'aide de triangulations orientées et coloriées [EM14], les *orientations polyédrales* (voir figure 7) et qui seront également l'un des objets étudiés dans cette thèse.

En plus de servir de support combinatoire à de nombreux objets physiques ou

1. À celles et ceux qui suivent : oui, en effet, compte tenu de la définition que l'on a donnée on a l'impression qu'il manque des cartes ! C'est qu'en réalité on considère les cartes sur la sphère, ce qui introduit des symétries. Rendez-vous à la section section I (p.22) pour en savoir plus ;)

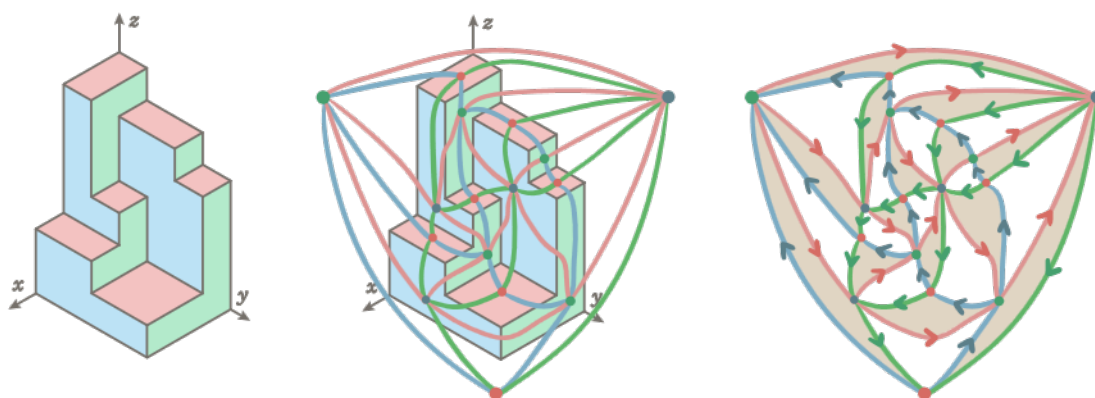


FIGURE 7 – Un polyèdre en coin (à gauche) et l’orientation polyédrale correspondante (à droite), correspondance due à [EM14].

géométriques, les cartes planes décorées induisent aussi des équivalents asymptotiques $\varkappa \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$ avec des exposants critiques α variés et surtout qui diffèrent des coefficients $\alpha = -5/2$ ou $\alpha = -3/2$ universels pour les cartes planes.

Des orientations bipolaires Au cœur de notre étude se trouvent les orientations bipolaires planes. Il s’agit là de cartes planes décorées par une orientation des arêtes, telle qu’il n’y ait pas de cycle orienté (on ne revient jamais sur ses pas tant qu’on respecte le sens de circulation et les sens interdits). On demande aussi à ce qu’exactement un sommet (noté $\mathcal{S}$, le pôle Sud) n’ait que des arêtes sortantes et un sommet $\mathcal{N}$ (le pôle Nord) n’ait que des arêtes entrantes ; on veut également que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ soient tous les deux sur la face extérieure (voir figure 8).

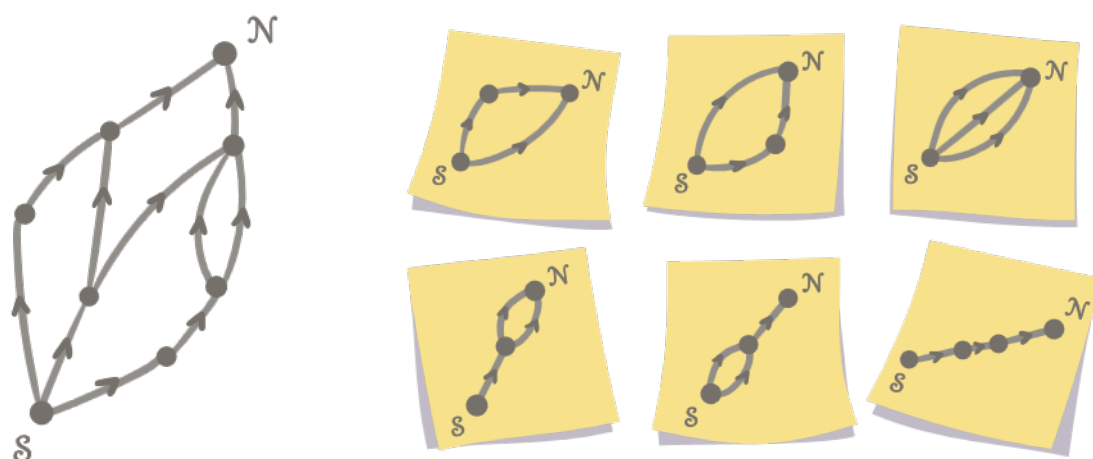


FIGURE 8 – Une orientation bipolaire plane (à gauche), et les 6 orientations bipolaires planes à 3 arêtes (à droite).

L'énumération des orientations bipolaires planes est elle aussi bien connue et on sait que cette famille est comptée par les *nombre de Baxter* (A001181 dans l'OEIS); et il existe de nombreux résultats bijectifs comptant ces cartes orientées. On peut par exemple citer la correspondance avec les *permutations de Baxter* (les permutations évitant les motifs barrés $2\bar{4}13$ et $3\bar{1}42$) due à [BBF08]. Ou encore une bijection entre les orientations bipolaires planes et des triplets de chemins qui ne se croisent pas [AP15]. Mais il est une correspondance que nous allons largement utiliser dans notre étude et qu'il nous faut présenter plus en détail.

La correspondance KMSW Outil central de cette thèse, la bijection dite *KMSW* (introduite dans [Ken+19]) met en correspondance les orientations bipolaires planes ayant $n + 2$ sommets avec une famille de marches (dites *tandems*) dans le quart de plan et de longueur n . « C'est quoi une marche dans le quart de plan ? » souffle l'a-béotien-ne. Mettons que l'on souhaite se promener tranquillement dans la grille infinie $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en commençant son chemin en un point (a, b) donné^m. Les règles de la promenade sont alors très strictes : seuls quelques pas sont autorisés, et on note S l'ensemble de ces pas ; par ailleurs il est formellement interdit de sortir du *quart de plan*, la région donnée par l'ensemble $\{(x, y), x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$. La *longueur* de la marche est alors tout simplement son nombre de pas. On donne à la figure 9 un exemple où l'ensemble S des pas autorisés est $S = \{(1, 0), (-1, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$ ⁿ.

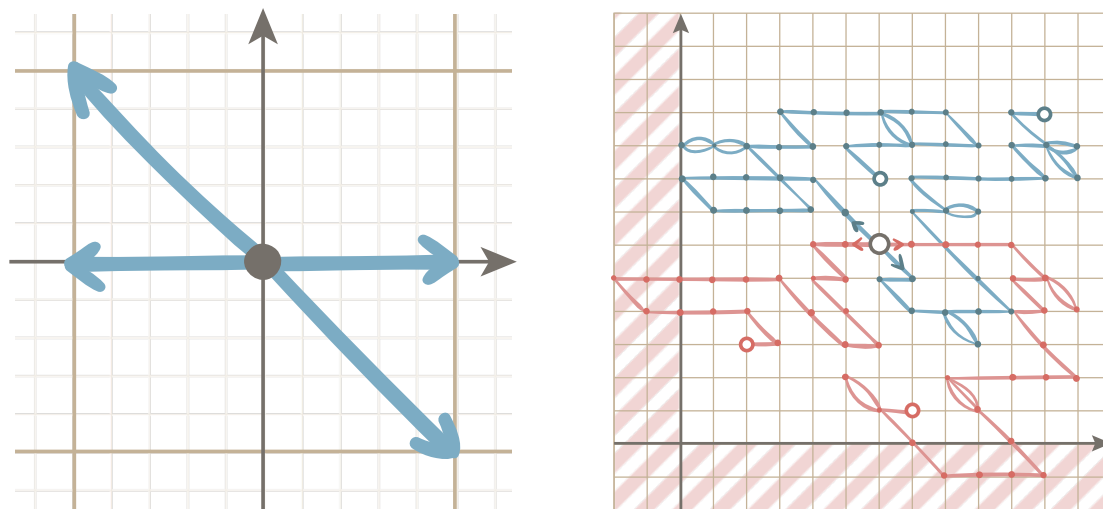


FIGURE 9 – L'ensemble S des pas autorisés (à gauche), et des exemples de marches sur S (à droite); en rouge celles qui ne restent pas dans le quart de plan.

A contrario des autres résultats bijectifs sur les orientations bipolaires planes,

m. Contrairement aux idées reçues, je vous assure que les mathématicien-ne-s savent aussi profiter de promenades plus conventionnelles.

n. On peut reconnaître là les marches de Gouyou-Beauchamps.

la correspondance KMSW donne un contrôle fin sur la taille des faces. C'est cette dernière propriété que nous allons exploiter dans notre étude. Cette bijection a d'ores et déjà été utilisée dans [BFR21], conjointement avec les méthodes d'énumération asymptotiques de marches contraintes à un cône données par [DW15 ; BRS14] ; nous nous inspirons largement de cette démarche.

Merci bien pour le contexte mais y'a quoi dans cette thèse ?

Sans surprise, l'idée ici est de fournir une énumération exacte et asymptotique de modèles de cartes planes décorées. On s'intéresse en particulier à cinq modèles de cartes. Les *posets plans* (cartes issues d'ensembles partiellement ordonnés) seront étudiés séparément selon leur nombre d'arêtes et leur nombre de sommets. Les *structures transverses* et les *bois de Schnyder triangulés*, deux familles étroitement liées à des algorithmes de dessins dans le plan, seront aussi de la partie.

Enfin, nous étudierons deux familles en correspondance avec des représentations de polyèdres en coin : les *orientations polyédrales*, ainsi que les *étiquetages de Schnyder*. À noter que cette dernière famille étend la notion de bois de Schnyder, des triangulations aux cartes 3-connexes. Ces deux dernières familles seront plus compliquées à traiter que les précédentes, et les méthodes de [DW15], par exemple, ne s'appliqueront pas ; on obtiendra des résultats plus faibles et par des méthodes *ad hoc*.

Cette thèse se veut surtout illustrée ; et j'espère fournir à notre aimable lecteur-riche, suffisamment d'images pour réussir à comprendre toutes les preuves sans trop avoir à griffonner dans les marges.

La plupart des résultats présentés dans le présent document sont issus des deux articles que j'ai rédigés en collaboration avec Éric Fusy et Gilles Schaeffer, au cours de ma thèse :

- *Enumeration of corner polyhedra and 3-connected Schnyder labelings*, Éric Fusy, Erkan Narmanli, Gilles Schaeffer. Abstract étendu publié à FPSAC'22 (Bangalore, Inde). Soumission papier en cours.
- *On the enumeration of plane bipolar posets and transversal structures*, Éric Fusy, Erkan Narmanli, Gilles Schaeffer. Abstract étendu publié à EuroComb'21 (Barcelone, Espagne). Soumission papier en cours.

Et ça s'organise comment ? Dans l'*État de l'art*, on présente en détail les cartes planes, les orientations bipolaires planes ainsi que les structures combinatoires de notre étude. On discute aussi de la bijection KMSW ainsi que de la méthode d'énumération asymptotique de marches contraintes à un cône, donnée par [DW15].

Dans le *chapitre A*, on met en bijection les familles de cartes de notre étude avec des familles d'orientations bipolaires planes décorées. Le but étant d'utiliser, par la suite, la bijection KMSW, nous prenons soin de ne décorer que les *faces* des

orientations bipolaires planes. Aussi, il s'agit de se contenter de contraindre la taille des faces, ou encore d'attacher, à chacune des faces, des arêtes dites *transversales*. Les deux modèles en relation avec des polyèdres en coin auront la particularité de se voir associer des orientations bipolaires planes biparties (dont les sommets sont bicoloriables), et l'ensemble des faces autorisées ne seront pas les mêmes selon que la *pointe* de la face est blanche ou noire.

Après avoir ramené nos modèles à des orientations bipolaires planes, on spécialise la bijection KMSW, dans le *chapitre B*, à des marches tandems *décorées* (par un poids numérique ou encore par des marches à petits pas). Les deux modèles récalcitrants, eux, se verront associer des marches *bimodales*, dont l'ensemble des pas autorisés dépend de la parité de l'ordonnée courante de la marche.

Le *chapitre C* sera dédié à obtenir des résultats de comptage exacts à partir de la traduction des modèles sous forme de marches tandems décorées dans le quart de plan. On donne des équations fonctionnelles vérifiées par les séries génératrices. On découpe les marches en marches à petits pas ce qui nous permet de donner des algorithmes pour calculer les premiers termes en temps polynomial. On montre également que les posets plans comptés par sommets sont comptés par la suite [A117106](#), qui compte les permutations planes.

Dans le *chapitre D*, on cherche à donner des résultats d'énumération asymptotique pour nos différents modèles de cartes. On se sert de la méthode fournie par [DW15] et qui permet de compter asymptotiquement le nombre de marches contraintes à un cône. Encore une fois, nos deux derniers modèles de cartes décorées ne se laisseront pas faire, et le caractère bimodal des marches tandems associées nous empêchera de nous servir de ces résultats. On s'en sort à l'aide d'un comptage *à la main*, et on conjecture un équivalent asymptotique pour ces deux modèles.

Enfin, dans le *chapitre E*, on donne une construction qui met en correspondance les posets plans comptés par sommets et les permutations planes, là où nous avons utilisé des techniques purement algébriques dans le chapitre C.

La plupart des chapitres ne sont pas indépendants et doivent être lus à la suite, exception faite du chapitre E (qui n'utilise que le chapitre C et les précédents). Toutefois, chaque chapitre est découpé en sections qui traitent chacune d'un modèle donné. Il est donc possible de lire toutes les sections relatives à un modèle sans se préoccuper des autres modèles (exception faite des sections relatives aux bois de Schnyder triangulés et aux étiquetages de Schnyder qui se rejoignent après le chapitre C)^o.

^o. Les pages de chacune des sections, elles, ne sont pas indépendantes et doivent être lues les unes à la suite des autres.

Présentation des modèles et état de l'art

Notations et vocabulaire

On présente ici brièvement et sans cérémonie les notations usuelles et le vocabulaire courant qui seront utilisés tout au long de ce document.

Théorie des ensembles Si E est un ensemble fini, on note $\#E$ le cardinal de E . Si A et B sont deux ensembles, on note $A \sqcup B$ l'*union disjointe* de A et B ; c'est-à-dire leur union usuelle, en renseignant par ailleurs que $A \cap B$ est vide. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbf{Q}$ celui des rationnels. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs. Si a, b sont deux entiers, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ le segment entier $\{a, \dots, b\}$. On note $\mathbf{S}$ la sphère euclidienne de dimension 2.

Théorie des graphes Si $G = (V, E)$ est un graphe, les arêtes de G sont des paires de la forme $e = \{v, v'\} \in E$, où $v, v' \in V$ sont des sommets de G ; si $v = v'$ on dit que e est une boucle. Si $v \in V$ est un sommet de G , alors on note $\deg(v)$ le degré de v , c'est-à-dire son nombre de voisins; les arêtes multiples sont comptées avec leur multiplicité dans le degré, de même une boucle compte 2 dans le degré. Un graphe est dit *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré k .

Si $G = (V, E)$ est un graphe orienté, les arêtes sont de la forme $e = (v, v') \in E$, où $v, v' \in V$. On dit que l'arête e est dirigée depuis v et vers v' ; v est appelée l'*origine* de e et v' est appelée la *cible* de e . Si v est un sommet de G , on note $\deg_{in}(v)$ son degré entrant et $\deg_{out}$ son degré sortant.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et H un sous-graphe de G , on dit que H est couvrant (dans G) lorsque l'ensemble des sommets de H est V .

Marches dans le plan Pour rendre plus claire la désignation des pas employés dans les marches dans le plan, on se réfère aux points cardinaux^p et on utilise une rose des

p. Pour ceux qui, comme moi, confondent régulièrement leur droite et leur gauche, je suis désolé si la référence aux points cardinaux rend l'exposé encore plus confus.

vents à 8 branches. Les pas $(0, 1), (1, 0), (0, -1)$ et $(-1, 0)$ se trouvent alors écrits N, E, S et W. De même les pas $(1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ et $(-1, 1)$ sont remplacés par NE, SE, SW, NW. On fait également l'ajout de quelques pas *doubles* : les termes N_2, W_2 et NW_2 désigneront respectivement les pas $(0, 2), (-2, 0)$ et $(-2, 2)$. Enfin, pour disposer de pas alternatifs, on introduit des pas dit *marquées*, qu'on orn timer d'une gracieuse étoile $*$; par exemple NW^* désigne un pas Nord-Ouest marqué.

Par ailleurs, on parlera de marches dans le *quart de plan* pour désigner les marches qui restent dans le quadrant $\{x, y \geq 0\}$. On parle d'*excursion* pour désigner les marches qui partent de $(0, 0)$ pour revenir en $(0, 0)$.

Analyse Si $x \in \mathbf{R}$ est un réel, on note parfois $\bar{x}$ pour désigner $1/x$. Si n est un entier positif et si $F(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ est une série entière, on note $[x^n]F(x)$ le n -ième coefficient a_n de $F(x)$. L'opérateur de probabilité est noté $\mathbb{P}$ et celui de l'espérance est noté $\mathbb{E}$.

I Cartes planes

I.1 Définitions et premières propriétés

Dans cette toute première section, on rappelle la définition et les propriétés fondamentales des cartes planes, qui seront notre principal objet d'étude tout au long de ce manuscrit. De très bonnes introductions aux cartes planes et planaires peuvent être trouvées ailleurs, on ira par exemple voir du côté de [Sch15]. On part du principe que notre aimable lecteur est d'ores et déjà familier avec les notions de graphes ; à toutes fins utiles on pourra toujours aller voir du côté du fantastique [DSS08]. On rappelle généreusement qu'un *multigraphe* est un graphe qui autorise aussi bien des arêtes multiples que des boucles. Un graphe qui interdit ces deux types d'arêtes, quant à lui, est dit *simple*. On commence par introduire les cartes planaires avant d'en tirer une définition pour les cartes planes.

Définition 1. Une *carte planaire* est la donnée d'un plongement d'un multigraphe connexe dans la sphère $\mathbf{S}$. On demande également que les arêtes ne se croisent qu'à leurs extrémités. À l'instar des graphes, on dira qu'une carte est *simple* si elle ne contient ni arête multiple et ni boucle.

Une carte planaire est donc un graphe planaire que l'on a décidé de dessiner sur la sphère. Mais une carte planaire contient bien plus d'informations que le graphe dont elle est la représentation ; et, pour un graphe planaire donné il existe plusieurs cartes correspondantes (voir figure 10). L'information supplémentaire fournie par une carte, c'est l'ordre dans lequel on a dessiné les arêtes autour de chacun des sommets^q. Dans la suite de notre exposé, on parlera de *paquet d'arêtes* pour désigner un ensemble d'arêtes vu successivement lorsqu'on fait le tour d'un même sommet. La

q. Une carte est donc la donnée d'un ordre circulaire (un *système de rotation*) sur les arêtes de chacun des sommets d'un graphe, pour peu que ces ordres soient cohérents entre eux.



FIGURE 10 – Au centre et à droite, deux cartes planaires différentes et issues du même graphe, représenté à gauche.

notion de paquet d'arêtes jouera un rôle dans les conditions locales qui définissent nos modèles de cartes décorées.

Si $\mathcal{M}$ est une carte planaire, une *face* de $\mathcal{M}$ est une composante connexe de $\mathbf{S} \setminus \mathcal{M}$. Aussitôt qu'on a énoncé la définition des faces d'une carte il nous faut, sans plus attendre, donner la relation fondamentale qui relie cette nouvelle notion à celle déjà présente dans les graphes :

Théorème 1 (Relation d'Euler). *Soit $\mathcal{M}$ une carte et soient $\#s, \#f, \#a$ respectivement le nombre de sommets, faces et arêtes de $\mathcal{M}$, alors on a la relation suivante :*

$$\#s + \#f = \#a + 2.$$

Un *coin* de $\mathcal{M}$ est la donnée $c = (v, e_1, e_2)$ d'un sommet v de $\mathcal{M}$ et de deux arêtes e_1 et e_2 incidentes en v et qui se suivent dans le tour des arêtes autour de v , réalisé dans le sens direct (voir figure 11). Un coin est donc inscrit dans une face, et le *degré* d'une face f est le nombre de coins auxquels f est incidente. Dans la suite on ne considère que des *cartes planaires enracinées*, c'est-à-dire des cartes qui ont un coin marqué; on appellera ces cartes des *cartes planes*. On appelle la face qui contient ce coin marqué la *face extérieure* (ou *face externe*) de $\mathcal{M}$. Les autres faces sont appelées les *faces internes* (ou *face intérieures*) de $\mathcal{M}$. À défaut de pouvoir rédiger ses articles sur des sphères, le/la combinatoricien·ne dessine donc ses cartes sur le plan, et prend pour convention que la face extérieure est la seule face non bornée (et qui se trouve donc à l'extérieur du reste de la carte). Le fait d'enraciner nos cartes retire donc les éventuelles symétries que l'on trouve sur la sphère (voir figure 11). De la même manière on appelle *sommet extérieur* les sommets adjacents à la face extérieure et *sommet interne* ou *sommet intérieur* tous les autres sommets.

I.2 Quelques constructions remarquables sur les cartes

Définition 2. Soit $\mathcal{M}$ une carte plane, alors on appelle *carte duale* de $\mathcal{M}$ et on note $\mathcal{M}^*$ la carte obtenue à partir de $\mathcal{M}$: en dessinant un sommet f^* dans chacune des

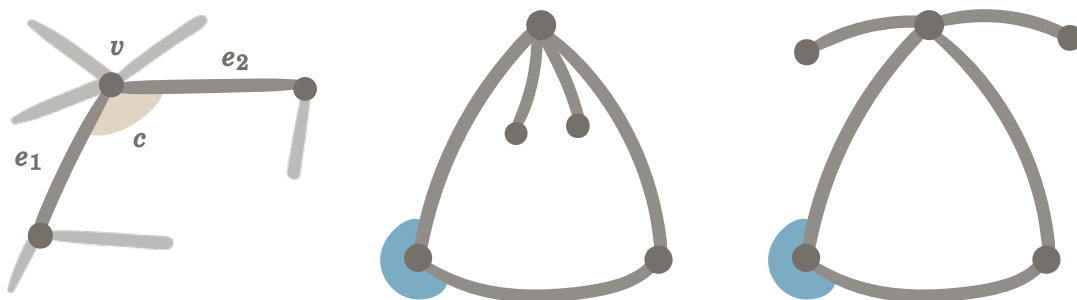


FIGURE 11 – À droite, un coin $c = (v, e_1, e_2)$ dans une carte plane. Au centre et à gauche, deux cartes planes (enracinées aux coins marqués en bleu) distinctes qui induisent la même carte non-enracinée (carte planaire).



FIGURE 12 – À droite, une carte plane $\mathcal{M}$ et, à gauche, sa carte duale; ou l'inverse.

faces f de $\mathcal{M}$; et en reliant deux sommets f_1^* et f_2^* par une arête e^* lorsque les faces correspondantes f_1 et f_2 partagent une arête e dans $\mathcal{M}$. On donne une illustration à la figure 12.

La notion de dualité définit alors une involution sur l'ensemble des cartes planes. Et si $\mathcal{M}$ est une carte, alors l'ensemble des faces de $\mathcal{M}$ s'identifie à l'ensemble des sommets de $\mathcal{M}^*$; l'ensemble des sommets de $\mathcal{M}$ s'identifie à l'ensemble des faces de $\mathcal{M}^*$; et enfin, l'ensemble des arêtes de $\mathcal{M}$ s'identifie à l'ensemble des arêtes de $\mathcal{M}^*$. De même on se rend compte que les faces de degré d sont envoyées sur des sommets de degré d et vice versa.

Définition 3. Une *triangulation* (resp. une *quadrangulation*) est une carte plane dans laquelle toutes les faces sont de degré 3 (resp. de degré 4). Pour $k \geq 1$, on parlera de *triangulation* (resp. *quadrangulation*) du k -gone pour désigner une carte dont toutes les faces sont de degré 3, hormis la face extérieure dont le contour est un cycle simple de longueur k .

Les quadrangulations ayant n faces sont alors naturellement en bijection avec les cartes planes à n arêtes. En effet, étant donné une carte, on ajoute un sommet

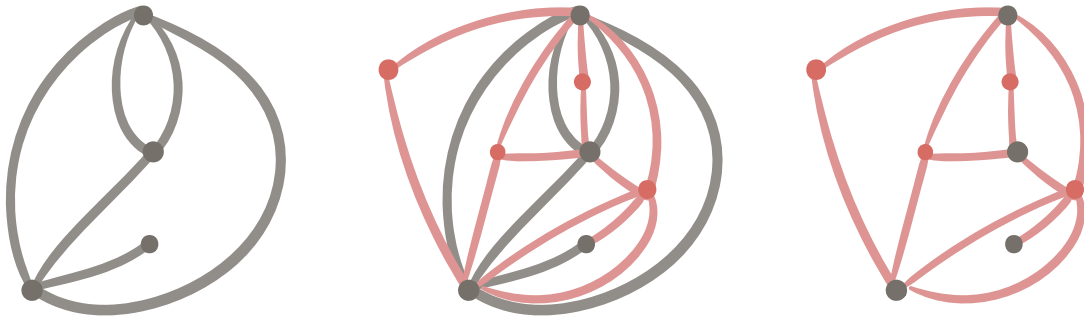


FIGURE 13 – À gauche, une carte plane à 6 arêtes et, à droite, la quadrangulation associée qui possède bien 6 faces.

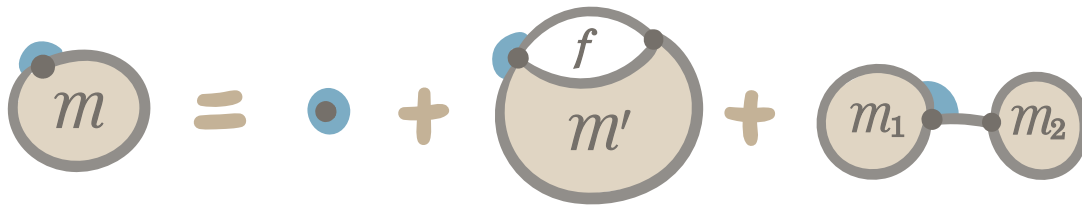


FIGURE 14 – Décomposition d'une carte par épluchage de l'arête à droite du coin racine si elle existe. Soit il n'y a pas de telle arête, soit l'arête sépare la carte en deux composantes connexes, soit pas.

dans chacune des faces que l'on relie aux sommets adjacents à cette face. En ôtant les arêtes de la carte initiale on obtient une quadrangulation où les arêtes de la carte initiale correspondent aux faces de la quadrangulation que l'on a construite (voir figure 13).

I.3 Combinatoire des cartes planes

Les travaux de comptage des cartes planes ont principalement été initiés par W. Tutte, qui a, progressivement, énuméré des familles de cartes [Tut62a ; Tut62b ; Tut62c]. Il donne une première méthode d'énumération dans le cas générique à l'aide de la bijection avec les quadrangulations que l'on a vues plus haut [Tut63] ; avant de donner une méthode plus directe [Tut68]. Dans les deux cas, l'idée consiste à *éplucher* la carte plane (ou la quadrangulation associée) en ôtant, successivement, l'arête à droite du coin racine (voir figure 14). En faisant cela, on risque de se retrouver avec une carte qui n'est plus connexe, et il est nécessaire d'avoir un contrôle sur le degré de la face extérieure pour savoir revenir en arrière. Aussi, il est nécessaire de rajouter une variable, dite *catalytique*^r, et qui vient compter la taille du bord de la face

r. catalytique car sans elle l'énumération devient très longue voir impossible !

extérieure. La série génératrice $M(t, u)$ des cartes planes, est alors donnée par $M(t, u) = \sum_m t^{e(m)} u^{d_o(m)}$, où $e(m)$ est le nombre d'arêtes de m et $d_o(m)$ le degré de sa face extérieure. La décomposition de la figure 14 donne alors l'équation fonctionnelle :

$$M(u) = 1 + tu^2 M(u)^2 + tu \frac{uM(u) - M(1)}{u - 1}. \quad (1)$$

Une telle équation se résout à l'aide de méthodes spécifiques aux équations fonctionnelles faisant apparaître des variables catalytiques, on pourra par exemple regarder la revue de M. Bousquet-Mélou [Bou11]. W. Tutte montre que le nombre m_n de cartes planes à n arêtes est donné par :

$$2 \cdot 3^n \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}. \quad (2)$$

On peut alors calculer les premiers termes de la série génératrice qui compte ces cartes :

$$M(t, 1) = 1 + 2t + 9t^2 + 54t^3 + 378t^4 + 2916t^5 + 24057t^6 + 208494t^7 + O(t^8). \quad (3)$$

II Orientations bipolaires planes

Dans cette section, on prend le temps de dresser un portrait des orientations bipolaires planes, qui seront l'objet *pivot* dans notre étude. Commençons, modestement, par donner une référence avérée en matière d'orientation bipolaire plane qu'est [FMR95]. Dans le paragraphe suivant on donne deux définitions équivalentes des orientations bipolaires planes ainsi que quelques notions connexes. Au paragraphe II.2, on donne les principaux résultats d'énumération concernant les orientations bipolaires planes.

II.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4. Une *orientation bipolaire plane* est une carte plane (enracinée) orientée $\mathcal{B}$ qui ne contient aucun cycle et qui possède une unique *source* (un sommet sans arête entrante) notée $\mathcal{S}$ et un unique *puits* (un sommet sans arête sortante) noté $\mathcal{N}$. On demande également à ce que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ soient incidents à la face extérieure de $\mathcal{B}$ et à ce que le pôle nord $\mathcal{N}$ soit à la racine de la carte. On appelle $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ les *pôles* de $\mathcal{B}$. On peut trouver un exemple d'orientation bipolaire plane à la figure 17.

Définition 5. Si $c = (v, e_1, e_2)$ est un coin dans une carte orientée, on dira que le coin c est *latéral* lorsque exactement une des deux arêtes e_1, e_2 est entrante et que l'autre est sortante. On dira que le coin c est *extrémal* dans le cas contraire, à savoir lorsque les deux arêtes sont entrantes en v ou qu'elles sont toutes les deux sortantes en v . Si la carte orientée est sans cycle, on parlera de même de *sommet extrémal* et *sommet latéral* d'une face f donnée, puisque chaque sommet a un unique coin dans chaque face à laquelle il est incident.

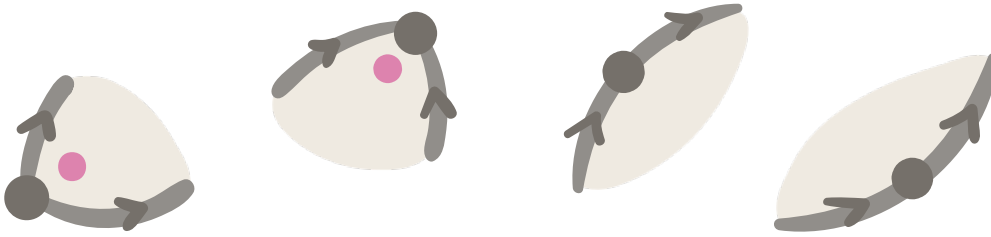


FIGURE 15 – À gauche, deux exemples de coins extrémaux; à droite, deux exemples de coins latéraux.

Parfois on notera les coins extrémaux d'une carte orientée à l'aide de marqueurs violets, afin de mieux les identifier. On trouvera à la figure 15 une illustration de coins latéraux et extrémaux.

Proposition 2. Soit $\mathcal{B}$ une carte plane munie d'une orientation, alors $\mathcal{B}$ est une orientation bipolaire plane si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

- (B) Pour tout sommet v de $\mathcal{B}$ hormis deux (innocemment notés $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$), v admet exactement deux coins latéraux et tous les autres coins étant extrémaux. Ainsi les arêtes de v sont séparés en deux paquets non vides : ses arêtes entrantes d'un côté et ses arêtes sortantes de l'autre. Les sommets $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ sont dans la même face et sont, respectivement, une source et un puits.
- (B') Toutes les faces f de $\mathcal{B}$ (y compris sa face extérieure) contiennent exactement deux coins extrémaux, tous les autres coins de v sont donc latéraux. Le contour de f est alors séparé en deux chemins : un bord latéral gauche et un bord latéral droit qui commencent à un même sommet (noté $\text{bottom}(f)$) et qui terminent à un même sommet (noté $\text{top}(f)$); les autres sommets autour de f sont les sommets latéraux de f .

Le sommet $\mathcal{S}$ est alors l'unique source de l'orientation bipolaire plane et $\mathcal{N}$ est son unique puits ; on résume à la figure 16 les propriétés (B) et (B'). On dira qu'un sommet est strictement sur le bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) d'une face f lorsqu'il est sur le bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) mais n'est ni $\text{top}(f)$, ni $\text{bottom}(f)$.

Remarque 6. La terminologie des coins *extrémaux* et *latéraux* découle donc de la répartition de ces coins le long d'une face d'une orientation bipolaire plane. La figure 16 montre en particulier que tout sommet d'une orientation bipolaire plane, exceptés $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$, est un sommet latéral pour exactement deux faces.

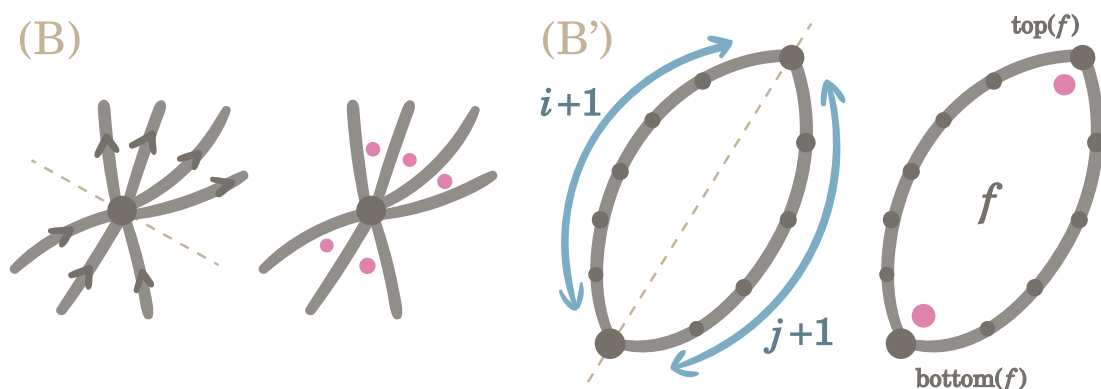


FIGURE 16 – Une illustration des conditions locales (B) sur les sommets internes, et (B') sur les faces des orientations bipolaires planes.

II.2 Principaux résultats et énumération

En parlant d'orientation bipolaire plane, il me semble nécessaire de mentionner les orientations bipolaires (tout court), à savoir les graphes orientés (non plongés et pas nécessairement planaires) qui ont une seule source, un seul puits et qui se trouvent être acycliques. Ces graphes peuvent être vus comme une représentation graphique d'ordre partiels sur des ensembles finis. En effet si G est une orientation bipolaire, on peut définir un ordre partiel Π sur les sommets de G de la manière suivante. Si $e = (v, v')$ est une arête orientée de G alors on pose alors $v \prec_{\Pi} v'$; sa clôture transitive $\leq_{\Pi}$ est alors bien transitive, réflexive et anti-symétrique. À noter qu'il n'existe pas une seule orientation bipolaire associée à Π , compte tenu qu'il est possible d'ajouter ou retirer des arêtes transitives dans G . On verra à la sous-section III.2 (p.31) la notion de posets qui eux sont uniquement associés à des ordres partiels.

Par ailleurs on peut mentionner le joli résultat de H. de Fraysseix et de P. Ossona de Mendez qui caractérise les ordres partiels qui admettent une orientation qui est planaire. Si Π_1, Π_2 sont deux ordres^s totaux, on définit l'*intersection* de ces deux ordres comme l'intersection ensembliste $\Pi_1 \cap \Pi_2$, qui est à nouveau un ordre partiel. On appelle alors *dimension* (ou *dimension de Dushnik-Miller*) d'un ordre partiel Π le nombre minimal k d'ordres totaux $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ nécessaires pour réaliser Π comme l'intersection $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_k$. Maintenant on définit l'*ordre partiel sur les arêtes* Π_E d'une orientation bipolaire; une arête e sera dite plus petite que e' dans Π_E lorsqu'il existe un chemin orienté qui commence par e et qui se termine par e' . On a la caractérisation suivante sur les orientations bipolaires planes [FM96].

Théorème 3. *Une orientation bipolaire est plane si et seulement si l'ordre partiel sur ses arêtes est de dimension au plus 2.*

À l'instar des graphes, on dit qu'une carte plane est k -connexe si elle a au moins $k +$

s. Que l'on peut considérer de manière ensembliste sous la forme $\Pi_i = \{(x, y) \in E^2, x \leq_{\Pi_i} y\}$.

1 sommets et qu'elle est toujours connexe si on lui ôte $k - 1$ arêtes. Parfois on dira qu'une carte est *non séparable* pour dire qu'elle est 2-connexe, c'est-à-dire qu'elle n'admet pas de sommet qui coupe la carte en deux composantes connexes. On a le résultat suivant sur les orientations bipolaires planes qui est dû à [LEC67].

Théorème 4. *Soit M une carte plane et S, N deux sommets de M ; alors M admet une orientation bipolaire plane de pôles S et N si et seulement la carte M à laquelle on a ajouté une arête $\{S, N\}$ est non séparable.*

On parle à présent des duales d'orientations bipolaires planes, et il me faut confesser que la définition que nous avons donnée des orientations bipolaires est quelque peu romancée. Usuellement les orientations bipolaires planes font apparaître une arête supplémentaire $e' = (S, N)$. Aussi le dual d'une telle carte ajoute un sommet supplémentaire au dual que nous aurions considéré sinon. Une autre façon de voir les choses revient à se dire qu'il y a en réalité, pour les orientations bipolaires planes, non pas une, mais *deux faces extérieures*. Pour orienter les arêtes de la carte duale d'une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$, on procède comme suit. Si e est une arête de $\mathcal{B}$ et si f_ℓ (resp. f_r) est la face à gauche (resp. à droite) de e , alors on oriente e^* depuis f_ℓ^* et vers f_r^* . On donne à la figure 17 une illustration de cette notion de dualité. On a le résultat suivant sur le dual d'une orientation bipolaire plane :

Proposition 5. *Soit $\mathcal{B}$ une orientation bipolaire plane, alors sa carte duale $\mathcal{B}^*$ est encore une orientation bipolaire plane. De plus, passer au bidual $(\mathcal{B}^*)^*$ revient à renverser l'orientation de $\mathcal{B}$, et il faut appliquer l'opération de dualité 4 fois pour revenir à l'orientation bipolaire plane initiale.*

Enfin, on peut donner un résultat d'énumération des orientations bipolaires planes trouvé pour la première fois par R. J. Baxter [Bax01]. Si on note $b_{i,j}$ le nombre d'orientations bipolaires planes avec $i + 1$ sommets et $j + 1$ faces, alors on a :

$$b_{i,j} = \frac{2(i+j-2)!(i+j-1)!(i+j)!}{(i-1)!i!(i+1)!(j-1)!j!(j+1)!}. \quad (4)$$

III Les structures combinatoires de notre étude

Dans cette section on présente les différents modèles combinatoires qui vont apparaître dans notre étude. On donne à chaque fois une définition des modèles et quelques propriétés importantes. On commence par présenter les modèles de cartes décorées puis on parle ensuite des permutations planes que nous mettrons en bijection avec l'un des modèles de cartes décorées, au chapitre E.

III.1 Orientations bipolaires planes biparties

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un modèle de notre étude, mais les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder, que nous introduirons respectivement aux paragraphes III.5 (p.35) et III.6 (p.38), induiront tous les deux des cartes

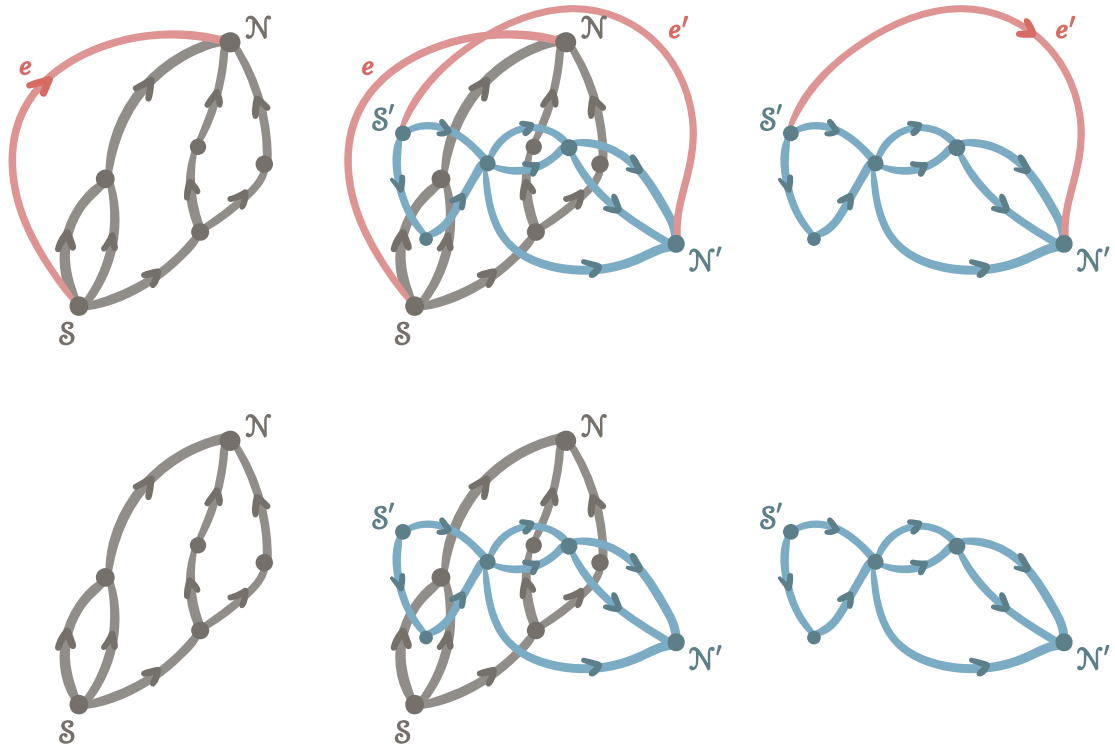


FIGURE 17 – On a représenté à gauche l'orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ et à droite sa duale $\mathcal{B}^*$. La première ligne représente $\mathcal{B}$ avec l'arête supplémentaire $e' = (S, N)$. À la seconde ligne on oublie cette arête (comme dans le reste de notre étude) et on fait comme si il y avait deux faces extérieures.

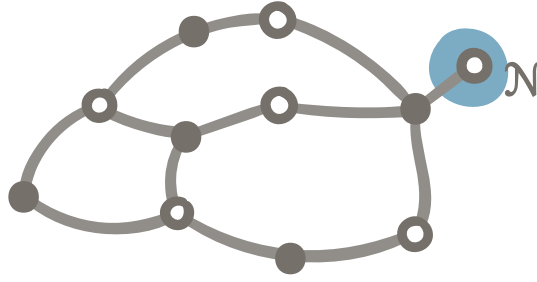


FIGURE 18 – Un exemple de carte plane bipartie. On remarque que le sommet adjacent au coin racine (dans nos modèles orientés il sera souvent nommé $\mathcal{N}$) sera toujours colorié en blanc.

biparties. Une carte plane $\mathcal{M}$ est dite *bipartie* simplement lorsque le graphe qu'elle représente l'est aussi. C'est-à-dire qu'il est possible de partitionner l'ensemble V de ses sommets en deux : $V = V_1 \sqcup V_2$; de telle sorte que toutes les arêtes de $\mathcal{M}$ aient une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2 . Dans le cas des cartes planes, on a la caractérisation suivante du caractère biparti :

Proposition 6. *Une carte plane est bipartie si et seulement si toutes ses faces sont de degré pair.*

Remarque 7. Une telle carte est bien entendue 2-coloriable, et nous colorions systématiquement les sommets d'une carte bipartie en blanc et en noir, en prenant la coloration telle que le sommet racine soit colorié en blanc. Dans nos modèles de cartes orientées le sommet racine sera également souvent le *pôle nord* $\mathcal{N}$ de la carte, retenons qu'il sera toujours colorié en blanc dans les cartes biparties. On donne un exemple à la figure 18.

III.2 Présentation des posets plans

Les posets plans sont un cas particulier d'orientations bipolaires planes. Contrairement aux orientations bipolaires planes, les posets plans définissent uniquement un ordre partiel sur l'ensemble de leurs sommets.

Définition 8. Soit $\mathcal{B}$ une orientation bipolaire plane alors une arête $e = (v_1, v_2)$ de $\mathcal{B}$ est dite *transitive* lorsqu'il y a un autre chemin dirigé qui relie v_1 à v_2 . Un *poset plan* est une orientation bipolaire plane qui n'admet aucune arête transitive. On peut trouver à la figure 19 un exemple de poset plan ainsi qu'une illustration de la condition sur les arêtes transitives. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des posets plans ayant n arêtes et $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des posets plans ayant $n + 2$ sommets. Enfin on écrit e_n (resp. v_n) pour désigner le cardinal $\#\mathcal{E}_n$ (resp. $\#\mathcal{V}_n$).

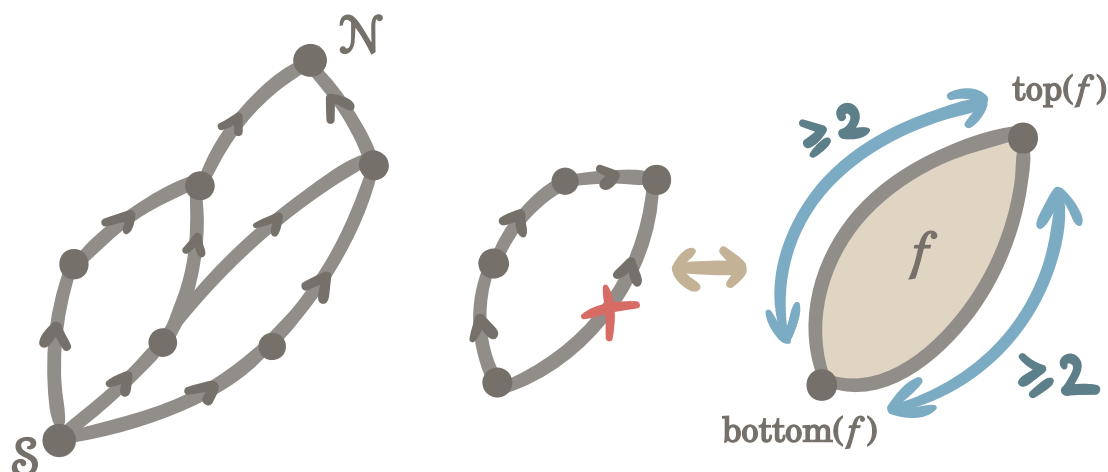


FIGURE 19 – À gauche, un exemple de poset plan. Au centre, la condition de non-transitivité dans les orientations bipolaires planes, et à droite, la condition équivalente sur le type des faces.

À nouveau, on peut utiliser la structure de carte plane pour donner une caractérisation par les faces des posets plans, en particulier on répond à la question : quelles sont les orientations bipolaires planes qui sont des posets plans ?

Proposition 7. *Soit $\mathcal{B}$ une orientation bipolaire plane alors $\mathcal{B}$ est un poset plan si et seulement si toutes les faces de $\mathcal{B}$ ont leur bord latéral gauche et bord latéral droit de longueur supérieure ou égale à 2 (voir figure 19). Cela revient à demander à ce que le type (i, j) (voir Définition 21) des faces de $\mathcal{B}$ vérifient $i, j \geq 1$.*

Démonstration. Dans le sens direct, supposons par l'absurde qu'il existe une face f de $\mathcal{B}$ dont le bord latéral gauche (par exemple) est de longueur 1. Alors le bord latéral droit de f est bien un chemin dirigé qui relie $bottom(f)$ à $top(f)$.

Dans l'autre sens, si $e = (v_1, v_2)$ est une arête transitive de $\mathcal{B}$, alors il existe un chemin dirigé P distinct de e qui relie v_1 à v_2 . Prenons P tel que la région définie par $P + e$ soit minimale au sens de l'inclusion. Alors on peut montrer que $P + e$ définit bien le contour d'une face, dont un des bords latéraux est e qui est de longueur 1. ♦

III.3 Présentation des bois de Schnyder triangulés

Les bois de Schnyder triangulés (autrefois appelés *realizers*) ont été introduits par W. Schnyder dans [Sch89]. Le but était alors de s'en servir comme un outil pour démontrer une caractérisation de planarité pour les graphes qui fait intervenir la dimension d'un ordre partiel (tout comme au Théorème 3, p.34). Si $G = (V, E)$ est un graphe, alors on définit un ordre sur $V \sqcup E$ donné par : $v <_G e$ si v est un sommet incident à l'arête e . Le graphe G est donc planaire si et seulement si $<_G$ est de dimension au plus 3. Les bois de Schnyder triangulés permettent alors à W. Schnyder

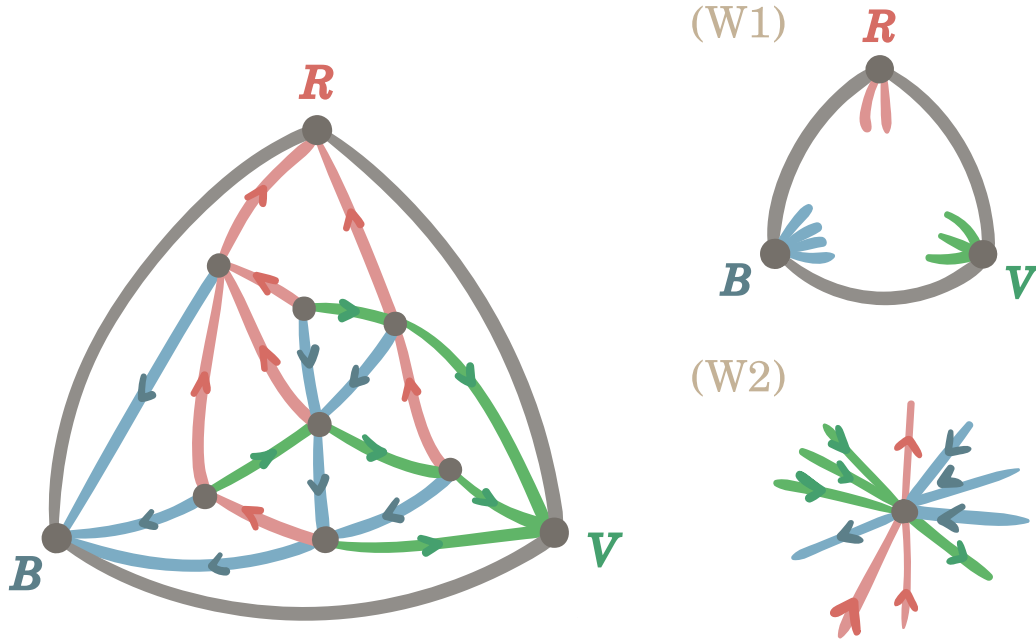


FIGURE 20 – Un exemple de bois de Schnyder triangulé ainsi qu’une illustration des conditions locales (W2) et (W1).

de représenter les (duaux des) trois ordres totaux desquels un graphe planaire est l’intersection. Il s’en sert par la suite pour donner des algorithmes de tracés en ligne droite que nous présenterons au paragraphe IV.4 (p.55). On donne ici la définition des bois de Schnyder triangulés par l’approche des triangulations.

Définition 9. Un bois de Schnyder triangulé est une triangulation simple $\mathcal{W}$ où les trois sommets incidents à la face extérieure sont nommés R, V et B , dans le sens horaire autour de la face extérieure et en partant de la racine de $\mathcal{W}$. Par ailleurs les arêtes internes de $\mathcal{W}$ sont orientées et sont coloriées en rouge, vert ou bleu de telle sorte que les deux conditions locales suivantes soient vérifiées :

- (W1) Toutes les arêtes internes incidentes aux sommets R, V, B sont entrantes en ces sommets et sont respectivement rouges, vertes et bleues.
- (W2) Si v est un sommet interne de $\mathcal{W}$, alors v a exactement trois arêtes sortantes e_r, e_v et e_b qui sont respectivement rouge, verte et bleue et qui apparaissent dans cet ordre dans le tour horaire autour de v . Les arêtes entrantes de v , quant à elles, forment trois paquets éventuellement vides. Le paquet rouge (resp. vert ; resp. bleu) se situe entre e_v et e_b (resp. entre e_b et e_r ; resp. entre e_r et e_v) dans le tour horaire autour de v .

On peut trouver à la figure 20 un exemple de bois de Schnyder triangulé ainsi qu’une illustration des conditions locales (W2) et (W1). On note $\mathcal{W}$ l’ensemble des bois de Schnyder triangulés et $\mathcal{W}_n$ l’ensemble des bois de Schnyder triangulés ayant $n + 3$

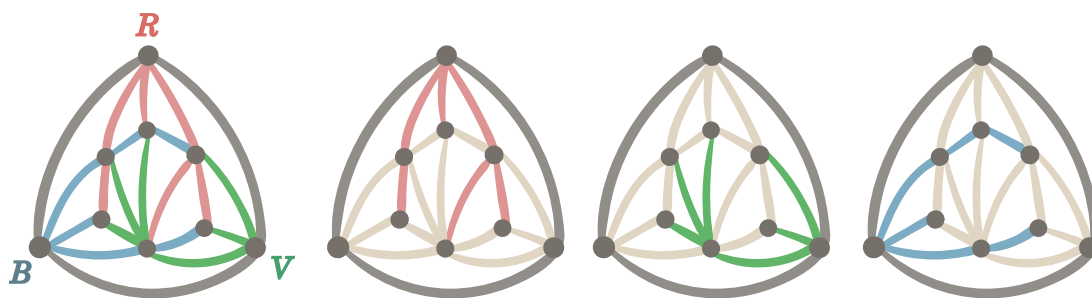


FIGURE 21 – Un exemple de bois de Schnyder triangulé $\mathcal{W}$ puis, de gauche à droite, ses trois arbres couvrants T_r, T_v et T_b .

sommets. Enfin on écrit w_n pour désigner le cardinal $\#\mathcal{W}_n$.

On verra que la notion peut être étendue naturellement aux cartes planes 3-connexes au paragraphe III.6. *A priori* il n'est pas évident qu'une telle carte décorée existe, mais il est en fait possible de montrer qu'une carte admet une décoration de ses arêtes qui vérifie (W2) si et seulement s'il s'agit d'une triangulation simple [Fus07 ; Sch89]. Il est même possible de donner un algorithme [Sch90 ; Bre00] pour colorier et orienter une triangulation et lui fournir une structure de bois de Schnyder triangulé.

On donne aussi une propriété importante des bois de Schnyder triangulés et qui établit qu'un tel objet donne une partition des arêtes de la triangulation sous la forme de trois arbres couvrants :

Proposition 8. *Soit $\mathcal{W}$ un bois de Schnyder triangulé, et T_r, T_v et T_b les sous-graphes respectivement induits par les arêtes rouges, vertes et bleues de $\mathcal{W}$. Alors T_r (resp. T_v ; resp. T_b) est un arbre qui couvre tous les sommets de $\mathcal{W}$ à l'exception de V et B (resp. de R et B ; de R et V). On donne un exemple à la figure 21.*

On va voir au paragraphe III.6 (p.38) comment généraliser les bois de Schnyder triangulés aux cartes 3-connexes. À la section IV, on va donner une formule close pour compter cette famille de cartes (p.45), et enfin on présentera leur utilisation dans des algorithmes de dessins (p.55).

III.4 Présentation des structures transverses

À l'origine, les structures transverses ont été introduites par X. He dans [He93] et uniquement dans le cas des triangulations (irréductibles). Elles permettaient alors de donner des algorithmes de dessin pour des graphes [KH97]. La notion a ensuite été étendue à n'importe quelle type de carte plane par [Fus07], qui a fourni une étude combinatoire approfondie en exhibant notamment une structure de treillis sur l'ensemble des structures transverses sur une carte donnée, qui a permis d'améliorer ces algorithmes de dessin.

Récemment, les structures transverses triangulées ont été indépendamment introduites pour résoudre des problèmes de physique statistique. En effet, le modèle

des *triangulations causales* [Lol01], notamment popularisé par les travaux de F. Markopoulou et L. Smolin [MS06] a fait l'objet d'une attention croissante et fournit aujourd'hui une piste vers le rapprochement entre les théories quantiques et relativistes [JLA09]. Les travaux récents de R. Loll et B. Ruijl dans ce domaine étendent cette classe de cartes à celles des *triangulations dynamiques localement causales* [LR15] dont la description est très similaire à celle des structures transverses triangulées.

Définition 10. Une *structure transverse* est une carte plane simple $\mathcal{X}$ dont le tour de la face extérieure est un contour simple de longueur 4. On note $\mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{S}$ ses sommets dans l'ordre horaire à partir de la racine ; par ailleurs les arêtes internes de $\mathcal{X}$ sont coloriées en bleu ou rouge et orientées de telle sorte que les deux conditions locales suivantes sont vérifiées :

- (T1) Toutes les arêtes internes incidentes aux sommets $\mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{S}$ sont respectivement sortantes bleues, entrantes rouges, entrantes bleues, et sortantes rouges.
- (T2) Si v est un sommet interne de $\mathcal{X}$, alors ses arêtes incidentes forment quatre paquets non-vides ; dans le sens horaire autour de v : des arêtes sortantes rouges, des sortantes bleues, des entrantes rouges puis des entrantes bleues.

On peut trouver à la figure 22 un exemple de structure transverse ainsi qu'une illustration des conditions locales (T2) et (T1). On dit que $\mathcal{X}$ est de *$\mathcal{WE}$ -type (p, q)* lorsque $\deg(\mathcal{W}) = p - 2$ et que $\deg(\mathcal{E}) = q - 2$. Par ailleurs une structure transverse dont toutes les faces internes sont de degré 3 sera appelée *structure transverse triangulée*. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des structures transverses et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des structures transverses ayant $n + 4$ sommets. Enfin on écrit t_n pour désigner le cardinal $\#\mathcal{T}_n$.

Comme pour les bois de Schnyder triangulés, on peut se demander si une telle coloration et orientation des arêtes existe, ce qui n'est *a priori* pas clair compte tenu de la définition. S'il n'existe pas de caractérisation simple pour les structures transverses dans le cas général, dans le cas triangulé on a une condition nécessaire et suffisante simple pour dire si l'on peut avoir une structure transverse. Cette caractérisation fait intervenir la notion suivante : on dira qu'une triangulation (resp. une triangulation du k -gone) est *irréductible* si l'intérieur de tous ses cycles de longueur 3 sont des faces. On a alors le résultat suivant [Fus07, Prop. 1.12].

Proposition 9. *Une triangulation $\mathcal{M}$ du 4-gone admet une coloration et une orientation de ses arêtes sous la forme d'une structure transverse si et seulement si $\mathcal{M}$ est irréductible.*

On donne à la section IV (p.46) les résultats de comptage connus ainsi que l'utilisation des structures transverses dans les algorithmes de dessins (p.55), et enfin le lien avec les pavages rectangulaires (p.52).

III.5 Présentation des orientations polyédrales

Les orientations polyédrales forment une famille de cartes planes décorées qui ont été introduites par D. Eppstein et E. Mumford [EM14] afin de caractériser les

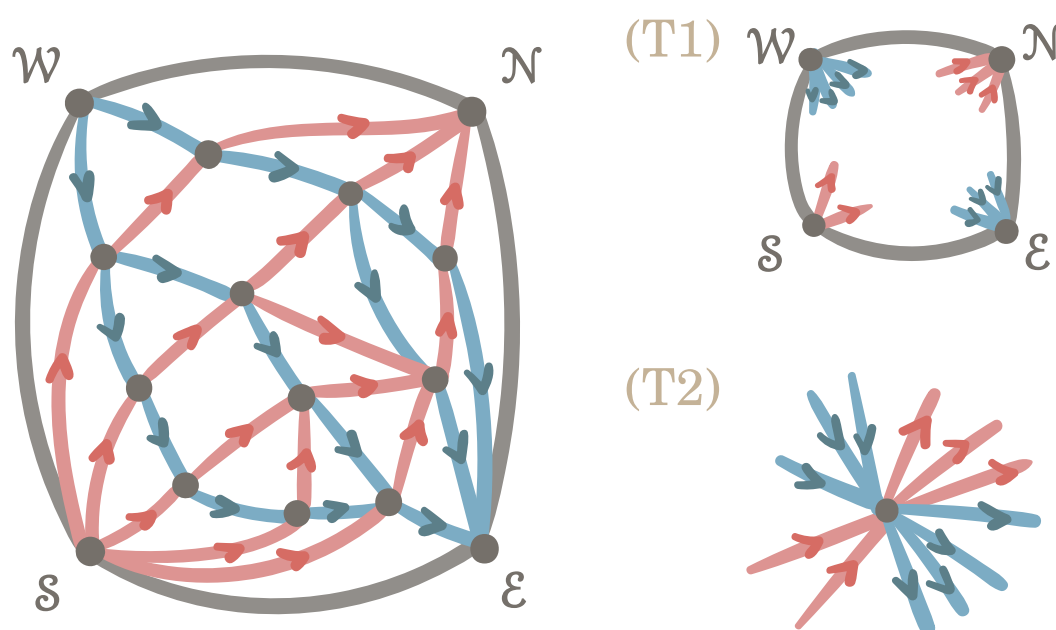


FIGURE 22 – À gauche, un exemple de structures transverses. À droite, une illustration des conditions locales (T1) et (T2).

graphes qui sont le squelette de certains polyèdres orthogonaux : les polyèdres en coins (voir paragraphe IV.2, p.46). Comme ces familles de cartes s'appuient sur les cartes eulériennes, on commence par en rappeler les définitions et principales propriétés.

Définition 11. Une carte plane est dite *eulérienne* lorsque tous ses sommets sont de degrés pairs. Dans ce cas on peut bicolorier ses faces (disons en *faces claires* et en *faces sombres*) de telle sorte que deux faces qui partagent une arête soient de couleurs différentes. Il existe alors un unique tel coloriage tel que la face extérieure soit claire (voir un exemple à la figure 23).

Proposition 10. Une triangulation est 3-coloriable si et seulement si elle eulérienne.

Remarque 12. Lorsqu'une triangulation est eulérienne, on colorie en bleu, rouge et vert ses sommets ; il existe un unique tel 3-coloriage une fois que l'on a fixé la couleur des trois sommets d'une face donnée. On colorie en rouge la racine de la triangulation et en vert puis bleu les deux sommets suivants de la face extérieure, pris dans l'ordre horaire autour de la face extérieure. On étiquette R, G, B ces sommets externes respectivement coloriés en rouge, vert et bleu.

Plutôt que de 3-colorier les sommets de la triangulation on peut à la place 3-colorier canoniquement ses arêtes. Chaque arête reçoit alors la couleur qu'elle ne voit pas, par exemple une arête reliant un sommet rouge et un sommet bleu sera

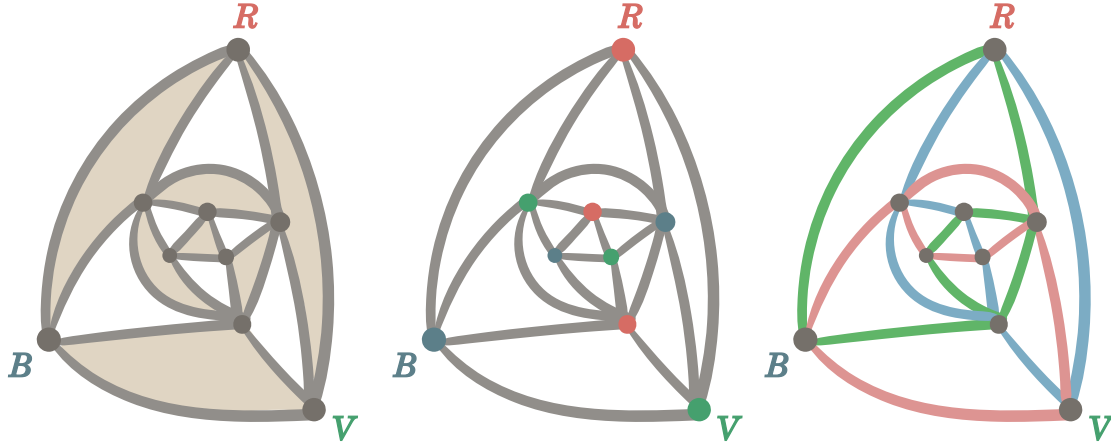


FIGURE 23 – Une triangulation eulérienne; représentée avec des faces sombres et des faces claires (à gauche); son 3-coloriage associé (au centre); et le 3-coloriage des arêtes (à droite), équivalent à celui de ses sommets.

coloriée en vert. On représente à la figure 23 les conventions de représentation que l'on vient d'énoncer.

Définition 13. Soit $\mathcal{O}$ une triangulation eulérienne enracinée munie d'une orientation, on dit que $\mathcal{O}$ est une *orientation polyédrale* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (P1) Le contour de la face extérieure de $\mathcal{O}$ définit un cycle horaire. Les sommets de $\mathcal{O}$ incidents à la face extérieure n'admettent aucun coin extrémal qui leur soit incident.
- (P2) Tous les sommets internes de $\mathcal{O}$ admettent exactement deux coins extrémaux et ces coins extrémaux se trouvent dans des faces claires de $\mathcal{O}$.

On peut trouver à la figure 24 un exemple d'orientation polyédrale et une illustration des conditions locales (P2) et (P1). On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des orientations polyédrales et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des orientations polyédrales ayant n sommets internes. On note également $\mathcal{P}_{a,b,c}$ l'ensemble des orientations polyédrales ayant a sommets internes rouges, b sommets internes bleus, et c sommets internes verts. Enfin, on écrit p_n pour désigner le cardinal $\#\mathcal{P}_n$ et $p_{a,b,c}$ pour $\#\mathcal{P}_{a,b,c}$.

Remarque 14. La condition locale (P2) implique que les contours des faces sombres d'une orientation polyédrale définissent soit un cycle horaire, soit un cycle anti-horaire.

À la section IV, on présente le lien entre les orientations polyédrales et les polyèdres en coins (p.46); on montre également comment les représenter à l'aide de systèmes de contacts de courbes (p.52).

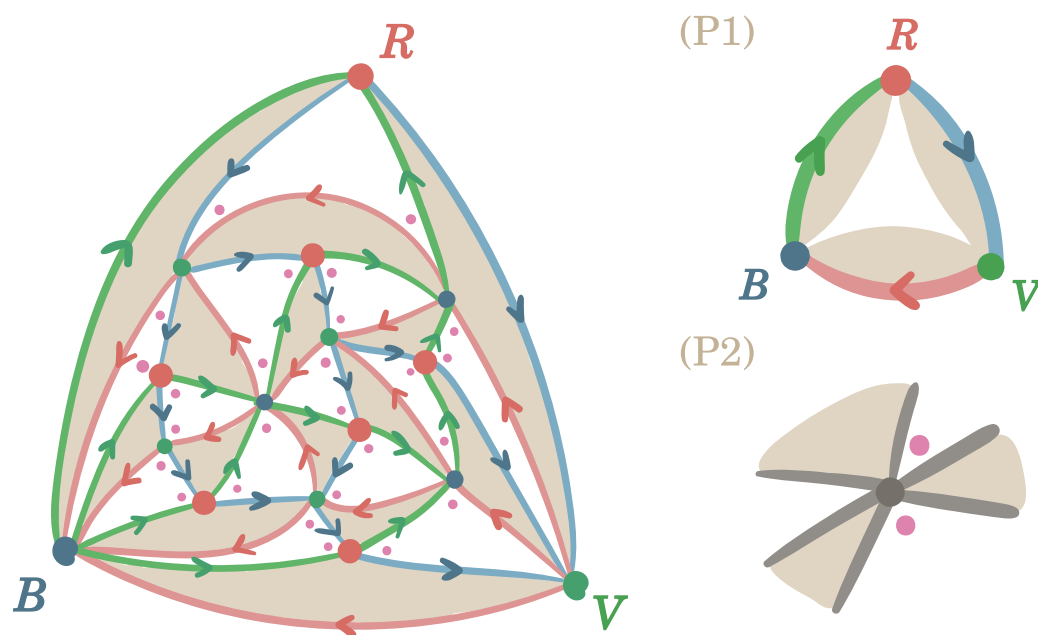


FIGURE 24 – Un exemple d'orientation polyédrale et une illustration des conditions locales (P2) et (P1).

III.6 Présentation des étiquetages de Schnyder

Les étiquetages de Schnyder sont des cartes décorées qui ont été introduites par S. Felsner dans [Fel03] afin de jouer le rôle de type combinatoire pour une classe particulière de représentation des polyèdres en coin (ceux-là même décrits par les orientations polyédrales, paragraphe III.5, p.35). On commence par donner notre définition à nous des étiquetages de Schnyder qui diffère quelque peu de celle donnée par Felsner. Dans un second temps, on explique comment retrouver les objets introduits par Felsner. Enfin on montre comment l'on peut voir les étiquetages de Schnyder comme une généralisation des bois de Schnyder triangulés aux cartes 3-connexes.

Définition et propriétés La définition des étiquetages de Schnyder prend pied sur les quadrangulations du 6-gone. Soit m une quadrangulation du 6-gone, alors la Proposition 6 (p.31) affirme qu'une telle carte est bipartie. Comme vu à la Remarque 7 on peut bicolorier les sommets de m en noir et blanc et on prend la seule coloration où la racine est blanche. On étiquette également R, G, B, R, G, B , dans le sens anti-horaire, tous les sommets de la face extérieure de m en commençant par sa racine. Un sommet extérieur d'une quadrangulation du 6-gone est dit *isolé* lorsqu'il est de degré 2, à savoir lorsqu'il n'a pas de sommet interne voisin. On peut trouver un exemple de quadrangulation du 6-gone ainsi représentée à la figure 25. Par ailleurs, il existe

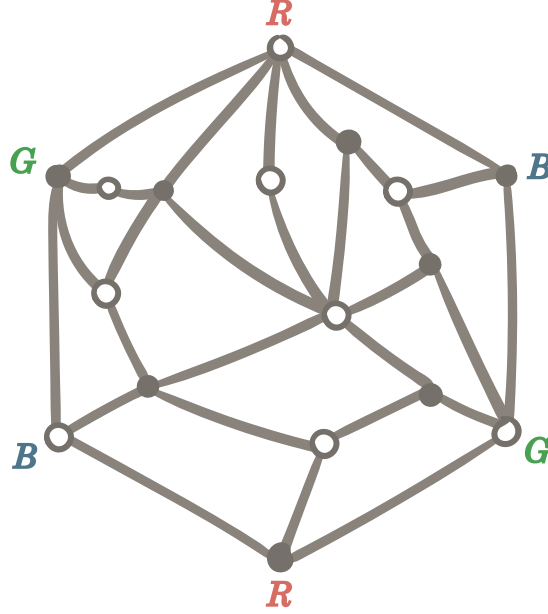


FIGURE 25 – Un exemple de quadrangulation du 6-gone représenté selon les conventions qu'on a données. À noter que d'après la Proposition 11, cette quadrangulation du 6-gone n'admet pas d'étiquetage de Schnyder.

des résultats d'énumération des quadrangulations du 6-gone donnés dans [BG14; FSP08; MS68].

Définition 15. Un *étiquetage de Schnyder* est une quadrangulation du 6-gone $\mathcal{C}$ qui est équipé d'une coloration de ses arêtes internes en rouge, vert et bleu telle que les deux conditions locales suivantes sont vérifiées :

- (S1) Les deux sommets étiquetés R (resp. étiquetés B, G) ont toutes leurs arêtes internes incidentes coloriées en rouge (resp. en bleu, vert).
- (S2) Si v est un sommet interne de $\mathcal{C}$, alors ses arêtes incidentes forment trois paquets non-vides ; dans le sens horaire autour de v : des arêtes rouges, puis vertes puis bleues.

On donne un exemple d'étiquetage de Schnyder à la figure 26, ainsi qu'une illustration des règles locales (S1) et (S2). On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des étiquetages de Schnyder et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des étiquetages de Schnyder ayant n faces internes. On note également $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des étiquetages de Schnyder ayant $a + 1$ sommets blancs et $b + 1$ sommets noirs. Enfin on écrit s_n pour désigner le cardinal $\#\mathcal{S}_n$ et $s_{a,b}$ pour $\#\mathcal{S}_{a,b}$.

Par ailleurs, il est possible de caractériser les quadrangulations du 6-gone qui admettent un étiquetage de Schnyder à l'aide du résultat suivant [FSP08; EM14] :

Proposition 11. Une quadrangulation du 6-gone admet un étiquetage de Schnyder si et seulement si elle n'a pas d'arêtes multiples et si tous ses 4-cycles définissent une face.

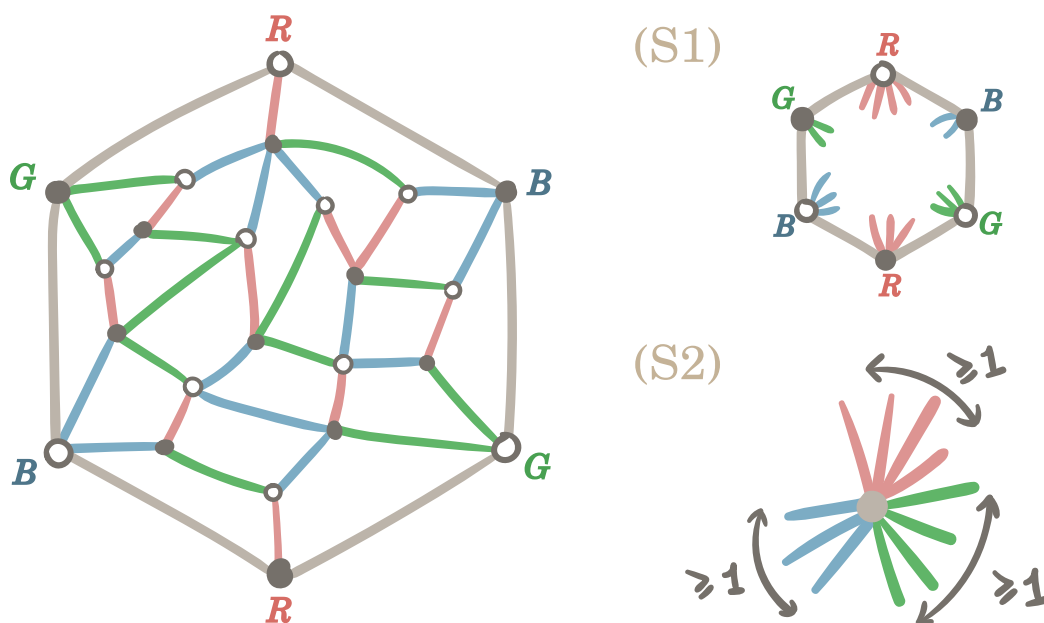


FIGURE 26 – Un exemple d'étiquetage de Schnyder et illustration des règles locales (S1) et (S2).

Lien avec les objets introduits par S. Felsner Les objets introduits initialement par [Fel00] pour faire le lien avec des représentations *rigides* de polyèdres en coins prennent pour support des cartes dites *quasi 3-connexes*. Une carte $\mathcal{M}$ est dite quasi 3-connexe lorsque :

- elle a trois sommets extérieurs, R, V, B , et qui apparaissent dans cet ordre là lorsque l'on fait le tour de la face extérieure de $\mathcal{M}$;
- de plus, on demande à ce que la carte $\mathcal{M}$ à laquelle on a ajouté le sommet ∞ dans la face extérieure et trois arêtes $\{R, \infty\}, \{V, \infty\}$ et $\{B, \infty\}$, soit, elle, 3-connexe.

Pour représenter ces arêtes, on ajoute une demi-arête à chacun des sommets R, V et B , dans la face extérieure. On donne un exemple d'une telle carte à la figure 27 (à gauche).

On donnera par la suite une couleur (une étiquette) rouge, verte, ou bleu aux coins internes de la carte complétée par le sommet ∞ . On dit qu'une suite de coins $(c_1, \dots, c_k)$ est *bien étiquetée* lorsque les coins rouges apparaissent les uns à la suite des autres, suivis des coins verts, puis des bleus.

Définition 16. Compte tenu des définitions précédentes, on appelle *étiquetage de Schnyder (au sens de Felsner)* une carte plane quasi 3-connexe $\mathcal{M}$, dont les coins sont coloriés en rouge, vert ou bleu, et qui vérifie que :

- (S1~) Les coins internes incident au sommet R (resp. V, B) sont rouges (resp. verts, bleus) ; la suite des coins incidents aux sommets externes sont bien étiquetés.

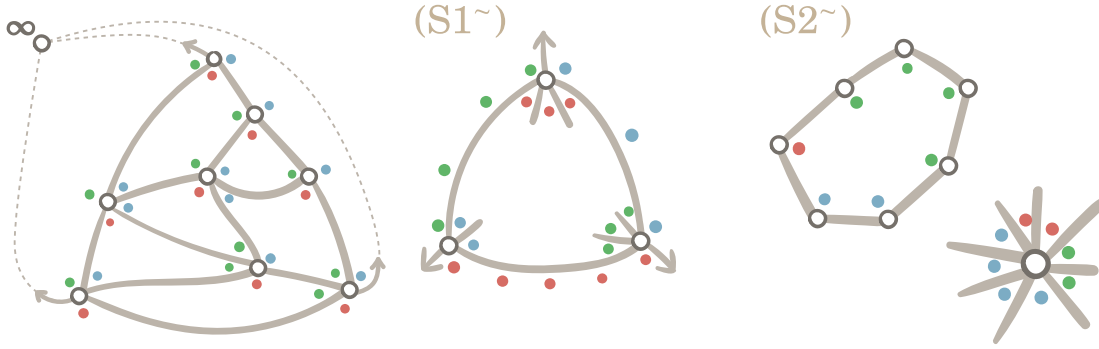


FIGURE 27 – À gauche un exemple de carte quasi 3 connexe, on a dessiné en pointillés les arêtes $\{R, \infty\}$, $\{V, \infty\}$ et $\{B, \infty\}$ qui rendent la carte 3-connexe. À droite une illustration des règles locales $(S1\sim)$ et $(S2\sim)$.

$(S2\sim)$ La suite des coins autour de chacune des faces internes de $\mathcal{M}$ est bien étiquetée ; la suite des coins autour de chacun des sommets est bien étiquetée.

On donne à la figure 27 une illustration de ces deux règles locales, on peut trouver à la figure 28 (à gauche) un exemple d'un tel objet.

À présent, on montre comment se ramener à nos étiquetages de Schnyder tels que donnés à la Définition 15 (p.39), à partir d'une carte $\mathcal{M}$ telle que l'on vient de la définir. Dans un premier temps on colorie les sommets en blancs ; on place un sommet noir dans chacune des faces internes de $\mathcal{M}$; puis on rajoute une arête entre ces nouveaux sommets noirs et chacun des coins de la face dans laquelle il se trouve^t. À présent, les arêtes que l'on a ajouté prennent la couleur du coin qu'elles ont rejoint et, pour terminer, on peut supprimer les arêtes de la carte originale. On donne à la figure 28 un exemple d'une telle construction.

On a alors une correspondance entre les étiquetages de Schnyder tels que considérés par S. Felsner et l'ensemble de nos étiquetages de Schnyder à nous, pris tels que les trois sommets extérieurs blancs R, G et B ne sont pas isolés. Pour pouvoir retrouver ces familles de cartes plus tard, on note $\tilde{\mathcal{S}}_n$ l'ensemble des étiquetages de Schnyder (au sens de la Définition 15) dont les trois sommets extérieurs blancs ne sont pas isolés et ayant n faces internes. De même que précédemment, on note aussi $\tilde{\mathcal{S}}_{a,b}$ l'ensemble des étiquetages de Schnyder dont les trois sommets extérieurs blancs ne sont pas isolés et qui ont $a + 1$ sommets blancs et $b + 1$ sommets noirs. On note respectivement $\tilde{s}_n$ et $\tilde{s}_{a,b}$ les cardinaux $\#\tilde{\mathcal{S}}_n$ et $\#\tilde{\mathcal{S}}_{a,b}$. On note $\tilde{\mathcal{S}} = \bigcup_n \tilde{\mathcal{S}}_n$.

Une généralisation des bois de Schnyder triangulés Dans ce paragraphe on montre en quoi les étiquetages de Schnyder peuvent être vus comme une extension de la notion de bois de Schnyder triangulés aux cartes (quasi) 3-connexes. Pour cela on s'appuie sur la relation avec la définition des étiquetages de Schnyder, celle de

t. La/le lect·rice·eur avisé·e reconnaîtra la carte des angles de $\mathcal{M}$.

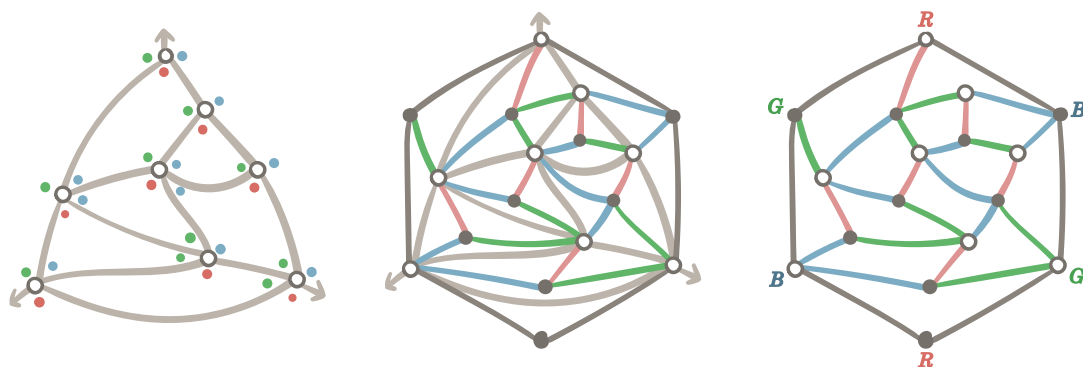


FIGURE 28 – Bijection entre les étiquetages de Schnyder tels que définis par Felsner (à gauche), et nos étiquetages de Schnyder qui ont leurs trois sommets externes blancs non-isolés.

Felsner, que nous venons de donner. En réalité, les bois de Schnyder triangulés sont des étiquetages de Schnyder dans le cas triangulé. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation, alors elle est bien simple si et seulement si elle est 3-connexe. Comme les triangulations simples sont exactement les cartes qui admettent une structure de bois de Schnyder triangulé, alors la triangulation $\mathcal{T}$ admet donc bien un bois de Schnyder triangulé si et seulement si elle admet un étiquetage de Schnyder. On montre à la figure 29 comment passer d'une coloration des coins d'un étiquetage de Schnyder aux colorations des arêtes d'un bois de Schnyder triangulé. À la section IV, on va donner quelques résultats concernant les étiquetages de Schnyder ; on présente notamment leur lien avec les représentations rigides de polyèdres en coin (p.46) ; on donne également une correspondance avec des systèmes de contacts de courbes triangulaires (p.52).

III.7 Présentation des permutations planes

On définit ici les permutations planes que l'on mettra en bijection avec les posets plans comptés par leur nombre de sommets au chapitre E (p.181). Une permutation $\pi = \pi(1) \cdots \pi(n)$, sur un ensemble à n éléments, sera représentée par son *diagramme*, c'est-à-dire l'ensemble des points $\{(i, \pi(i)), 1 \leq i \leq n\}$; on appelle ses éléments les *points de π* . Soit $\tau = \tau_1 \cdots \tau_k$ une seconde permutation, et $i_1 < \cdots < i_k$ des entiers, on dit que la suite $\pi(i_1), \dots, \pi(i_k)$ est une *occurrence du motif τ* lorsqu'elle est ordre-isomorphe à $\tau_1, \dots, \tau_k$. On dit alors que π *évite τ* lorsque π ne fait apparaître aucune occurrence de τ . Aujourd'hui l'énumération des permutations qui évitent un voire deux motifs de taille 3 (*i.e.* où τ est à support sur $\{1, 2, 3\}$) est bien connue [SS85]. On sait, par exemple, que le nombre de permutations qui évitent le motif 123 est compté par les nombres de Catalan. La recherche se penche désormais sur les motifs de taille 4 ou plus, ou encore vers les motifs dit *barrés*. On dit que π *évite le motif barré $\tau_1 \cdots \tau_j \tau_{j+1} \cdots \tau_k$* si aucune occurrence $\pi(i_1), \dots, \pi(i_k)$ de $\tau_1 \cdots \tau_k$ ne fait apparaître les points $(i_j, \pi(i_j))$ et $(i_{j+1}, \pi(i_{j+1}))$ à la suite. C'est-à-dire que l'on a $i_{j+1} = i_j + 1$. On

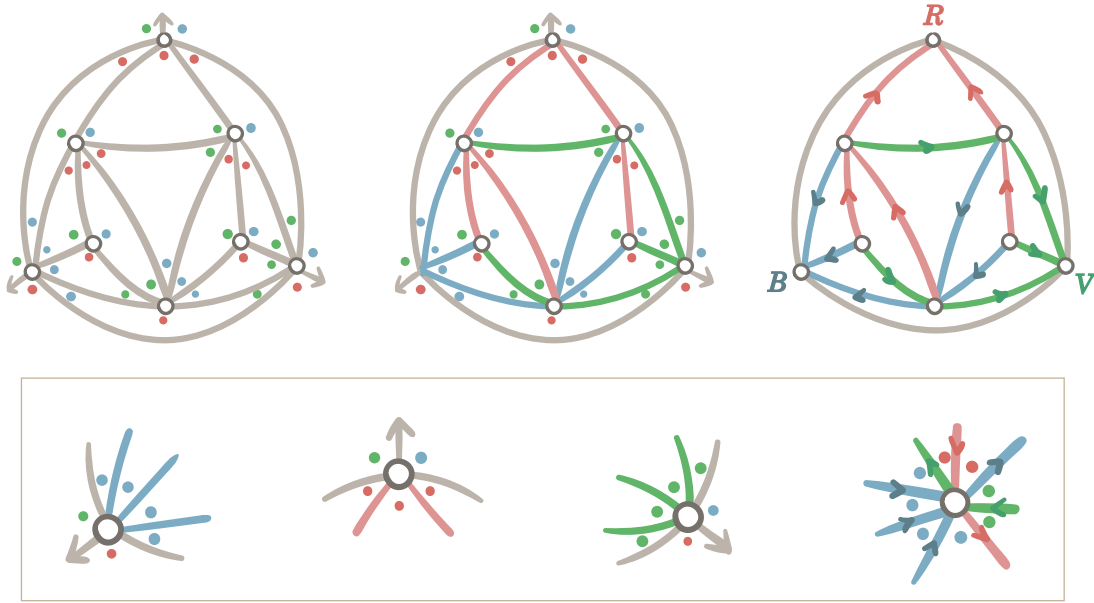


FIGURE 29 – Traduction des étiquetages de Schnyder (au sens de Felsner) vers les bois de Schnyder triangulés dans le cas d'une carte triangulée. On donne les règles de traduction dans l'encadré.

donne à la figure 30 une illustration des notions de permutations qui évitent des motifs, éventuellement barrés. Les permutations que l'on va étudier, elles, se définissent également à l'aide de motifs barrés :

Définition 17. On appelle *permutation plane* toute permutation qui évite le motif barré $21\bar{4}3$. On note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des permutations planes à support sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On donne à présent une définition géométrique équivalente des permutations planes. On peut définir la *relation de dominance* sur les points de π : on dit que le point $p = (x, y)$ est *dominé* par le point $p' = (x', y')$, et on note $p \preccurlyeq p'$ lorsque $x \leq x'$ et $y \leq y'$ ^u. Le *diagramme de dominance* de π est alors obtenu de la manière suivante :

- on part de l'ensemble des points de π , et on dessine une arête orientée de p vers p' pour tout couple (p, p') tel que $p < p'$;
- on enlève ensuite toutes les arêtes transitives du graphe orienté que l'on a obtenu^v.

En d'autres termes, le diagramme de dominance de π est le diagramme de Hasse associé à la relation de dominance $\preccurlyeq$ sur les points de π . On a alors la caractérisation suivante par le diagramme de dominance [BB07] :

u. Cela revient à avoir p' dans le quadrant Nord-Est de p .
v. On peut aussi construire ce diagramme en traçant une arête orientée de p vers p' lorsque $p \preccurlyeq p'$, et en demandant à ce que le rectangle de coins p et p' ne contienne aucune arête.

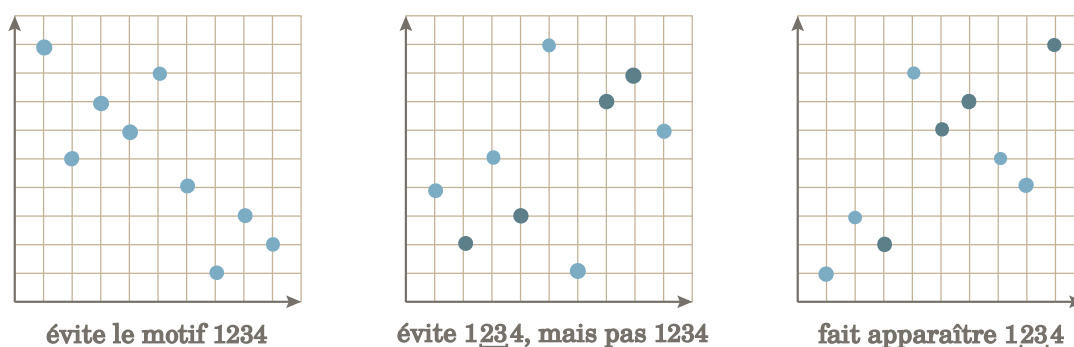


FIGURE 30 – Trois permutations qui font apparaître ou non des motifs liés à 1234.

Proposition 12. *Une permutation est plane si, et seulement si, son diagramme de dominance est planaire. En particulier, une permutation π est plane si et seulement si sa réciproque π^{-1} l'est.*

Arbre de génération pour les permutations planes Dans [Bou+18], M. Bouvel, V. Guerrini, A. Rechnitzer, et S. Rinaldi donnent un arbre de génération pour les permutations planes ; on en donne ici une description. Soient n un entier strictement positif et π une permutation plane à support sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le complété $\bar{\pi}$ de π comme étant la permutation sur $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$ telle que $\bar{\pi}(0) = 0, \bar{\pi}(n+1) = n+1$ et $\bar{\pi}(i) = \pi(i)$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$.

Soient n un entier strictement positif et π' une permutation plane à support sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Alors le parent de π' dans l'arbre de génération est obtenu à partir de π' en supprimant le point le plus à droite dans son diagramme de dominance. Dit autrement, il s'agit de la permutation plane π donnée par $\pi(i) = \pi'(i) - \mathbf{1}_{\pi'(i) > \pi'(n+1)}$ pour tout i compris entre 1 et n .

Dans l'autre sens, soient π une permutation plane dans $\mathcal{F}_n$, et a est un entier compris entre 1 et $n+1$, alors on peut construire la permutation $\pi \cdot a$ comme suit. On pose $(\pi \cdot a)(n+1) = a$; et pour tout i entre 1 et n , alors $(\pi \cdot a)(i)$ vaut $\pi(i) + \mathbf{1}_{\pi(i) \geq a}$. Alors, l'entier a est dit *actif pour π* lorsque $\pi \cdot a$ est dans $\mathcal{F}_{n+1}$. On transpose cette définition au diagramme de dominance de π , et si $\pi \cdot a$ est dans $\mathcal{F}_{n+1}$ on dit que le point p de $\bar{\pi}$, qui se trouve à l'ordonnée $a-1$, est *actif*. De même on assimilera π_p à $\pi \cdot a$. On donne à la figure 31 une illustration.

Dans le chapitre E (section E.3, 186), on utilisera ces arbres de génération pour donner une preuve combinatoire du théorème E.1 (p.183) qui met en bijection les permutations planes avec les posets plans comptés par sommets.

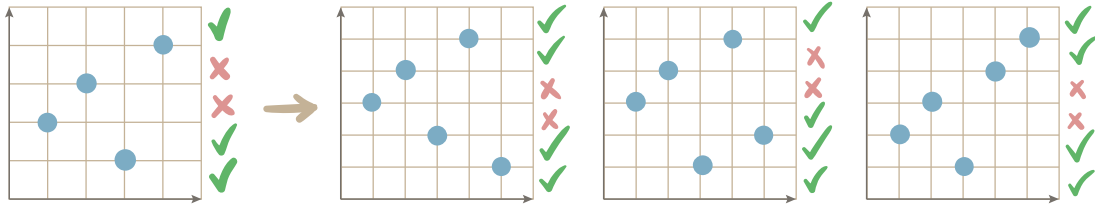


FIGURE 31 – À gauche une permutation plane et à sa droite ses trois enfants dans l'arbre de génération. On marque en vert les hauteurs où l'on peut insérer des points qui induisent une permutation plane; une marque verte entre l'ordonnée a et $a - 1$ indique que le point $a - 1$ est actif.

IV Combinatoire des modèles de cartes décorées considérés

Le but de cette section est de présenter les principaux résultats, déjà connus, qui concernent les cartes décorées que nous étudions. Bien entendu, il ne s'agit pas là d'une revue exhaustive de la littérature et on présente les aspects qui motivent notre étude.

Dans un premier temps (paragraphe IV.1), on donne des résultats d'énumération pour les bois de Schnyder triangulés et les structures transverses. Au paragraphe IV.2 (p.46), on présente le lien entre les polyèdres en coin et les familles des orientations polyédrales et des étiquetages de Schnyder. On donne d'autres liens avec des objets géométriques, les systèmes de contacts de courbes, au paragraphe IV.3 (p.52). Enfin, au paragraphe IV.4 (p.55), on présente quelques algorithmes de dessins de cartes planes qui se servent de nos modèles de cartes décorées.

IV.1 Résultats de comptage exacts ou asymptotiques

Dans ces quelques paragraphes on donne quelques résultats importants d'énumération sur les modèles de cartes que l'on étudie.

Énumération des bois de Schnyder triangulés Dans son article [Bon05], N. Bonichon donne une bijection entre les bois de Schnyder triangulés et les paires de chemins de Dyck qui permet d'énumérer pour la première fois le nombre de bois de Schnyder triangulés à $n + 3$ sommets. L'idée générale de la bijection consiste à associer à chaque bois de Schnyder triangulé $\mathcal{W}$ un bois de Schnyder triangulé particulier $\mathcal{W}^*$ et qui est dit *étoilé*, c'est-à-dire que son arbre vert T_v est de profondeur 1. Le passage de $\mathcal{W}^*$ à $\mathcal{W}$ est donné par un ensemble unique de certaines opérations *flip*. Par ailleurs, les bois de Schnyder triangulés étoilés sont assez rigides et sont entièrement déterminés par l'un des deux arbres couvrants non triviaux restants (disons l'arbre

rouge T_r). On peut classiquement encoder T_r par un chemin de Dyck w . Il est alors possible d'encoder la suite de flips nécessaires pour passer de $\mathcal{W}^*$ à $\mathcal{W}$ en un second chemin de Dyck, obtenu à partir de w et qui reste toujours au-dessus de w .

N. Bonichon montre que cette construction définit une bijection entre les bois de Schnyder triangulés et les paires de chemins de Dyck qui ne se croisent pas. Il utilise ensuite le résultat dû à D. Gouyou-Beauchamps [Gou86] qui compte le nombre de telles paires de chemins. On obtient que le nombre de bois de Schnyder triangulés à $n + 3$ sommets est donné par :

$$\text{Cat}_{n+2} \text{Cat}_n - \text{Cat}_{n+1}^2.$$

Où Cat_n désigne le n -ième nombre de Catalan (voir la séquence dans l'OEIS [A000108](#)).

Énumération des structures transverses S'il n'y a pas d'espoir d'obtenir une formule close pour compter les structures transverses (on montre par ailleurs au chapitre D que la série génératrice n'est pas holonome), il existe toutefois des algorithmes en temps polynomial pour compter le nombre de structures transverses. T. Takahashi [Tak14] donne une décomposition des structures transverses en se servant de leur correspondance avec les pavages rectangulaires, l'idée consiste à travailler plus généralement sur des pavages de l'*escalier* et d'en ôter les rectangles un à un.

À l'aide de décompositions similaires, T. Takahashi, R. Fujimaki, et Y. Inoue [TFI09 ; FIT09] donnent un algorithme dans le cas des structures transverses triangulées ; c'est-à-dire sur les pavages rectangulaires où tous les sommets sont de degré au plus 3. Ces résultats leur permettent également de montrer que le nombre t_n de structures transverses à $n + 4$ sommets vérifie l'inégalité :

$$t_n \leq \left(\frac{27}{2}\right)^n. \quad (5)$$

Ils conjecturent alors que le coefficient de croissance pour t_n est 13,5. On montrera au paragraphe D.1.3 (p.163) que cette conjecture est bel et bien vérifiée et on donne même un équivalent pour le nombre de structures transverses à $n + 4$ sommets. On donne à la section C.5 (p.142) une récurrence qui permet de trouver des algorithmes pour calculer les premiers termes t_n qui sont aussi bons que ceux fournis par [TFI09 ; ITF09].

Tout comme la description que nous allons donner dans ce manuscrit, la récurrence fournie par [TFI09 ; ITF09] peut se reformuler sous la forme de marches discrètes, ici dans le 8ième de plan. Toutefois il n'est alors pas simple d'utiliser les techniques de [DW15] (voir section VI) puisque l'ensemble des pas n'est pas le même selon que l'on soit sur la diagonale $x = y$ ou non.

IV.2 Lien avec des polyèdres en coin

Dans ce paragraphe on définit les polyèdres en coin et on donne les relations avec les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder qui définissent les types

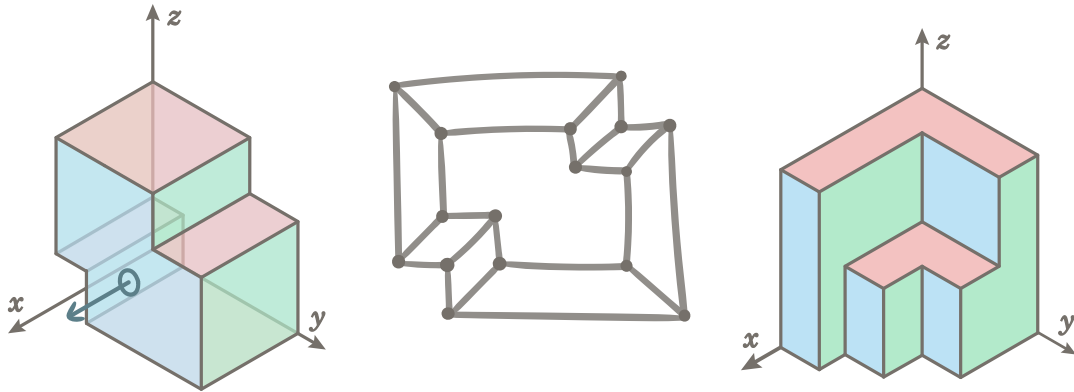


FIGURE 32 – À gauche un polyèdre orthogonal, on a également représenté le vecteur orthogonal d'un de ses flats; au centre son squelette. À droite un polyèdre en coin; on se permet de ne pas représenter les arêtes et sommets derrière le polyèdre puisqu'il n'y a pas d'information inconnue : il y a trois flats qui ne sont pas à vue et qui se rencontrent en l'origine.

combinatoires de certaines classes de polyèdres en coin.

En tout premier lieu, un *polyèdre orthogonal* est une forme 3D qui a la topologie de la boule et dont la frontière est composée de surfaces planes, appelées des *flats*. On demande à ce que chacun des flats soit orthogonal à l'un des trois axes, x, y ou z , des coordonnées. Deux flats qui se rencontrent doivent nécessairement être orthogonaux à des axes différents et au plus trois flats peuvent se rencontrer (forcément en un point). À un polyèdre orthogonal on peut associer la carte 3-régulière donnée par sa frontière : les sommets sont les lieux de rencontre de trois flats ; les arêtes là où il se rencontrent deux flats ; les faces sont donc naturellement en correspondance avec les flats du polyèdre. On appelle cette carte le *squelette* du polyèdre orthogonal.

Définition 18. Un *polyèdre en coin* est un polyèdre orthogonal dont exactement trois flats voient leur vecteur orthogonal avoir une coordonnée strictement négative. Ces trois flats sont incidents et on fixe le point d'intersection à l'origine des coordonnées.

Pour plus de lisibilité on représentera en bleu (resp. en vert ; resp. en rouge) les flats dont le vecteur orthogonal est colinéaire à l'axe x (resp. y ; resp. z). On donne à la figure 32 des exemples de polyèdres orthogonaux, squelettes et polyèdres en coin.

Polyèdres en coin et orientations polyédrales Regardons la carte duale T associée au squelette d'un polyèdre en coin. Puisque le squelette est 3-régulier, alors T est une triangulation, et on désigne la face qui contient l'origine comme la face extérieure de T . Les sommets de T correspondent aux flats du polyèdre en coin et on colorie en bleu (resp. vert ; resp. rouge) les sommets qui sont dans un flat orthogonal à l'axe des x (resp. des y ; resp. des z). À nouveau, et comme dans la Remarque 12 (p.36), on

peut colorier les arêtes de la couleur que ses sommets ne voient pas. Enfin, on peut donner une orientation aux arêtes de T en orientant les arêtes bleues (resp. vertes ; resp. rouges) dans la direction où la coordonnée z (resp. x ; resp. y) augmente. On peut alors montrer qu'on obtient une orientation polyédrale. On donne à la figure 33 une illustration de cette construction.

Dans [EM14], D. Eppstein et E. Mumford ont démontré que toute orientation polyédrale peut être obtenue de cette manière, à partir d'un polyèdre en coin. On peut alors voir les orientations polyédrales comme le type combinatoire des polyèdres en coin. Aussi, p_n compte le nombre de types combinatoires des polyèdres en coin ayant $n+3$ flats. De même $p_{a,b,c}$ compte ceux qui ont $a+b+c+3$ flats, parmi lesquels $a+1$ sont rouges, $b+1$ sont bleus et $c+1$ sont verts.

Polyèdres en coin rigides et étiquetages de Schnyder On définit ici une condition supplémentaire sur la manière de représenter un polyèdre en coin : la condition de rigidité. On explique également en quoi on peut voir les étiquetages de Schnyder comme le type combinatoire de ces représentations particulières.

Soit P un polyèdre en coin, alors [Fel03] fournit une autre construction qui permet d'associer à P une carte décorée. Dans un premier temps on lui associe la carte bipartie S' suivante (illustration à la première ligne de la figure 34) :

- On note S la surface obtenue en faisant l'union de la surface de P et des trois quadrants $Q_x = \{y, z \geq 0, x = 0\}$, $Q_y = \{x, z \geq 0, y = 0\}$ et $Q_z = \{x, y \geq 0, z = 0\}$.
- Soient maintenant v_x (resp. v_y ; v_z) les sommets extrémaux de P sur l'axe des x (resp. l'axe des y ; l'axe des z). Soient u_x, u_y, u_z les points de S donnés comme les maximums, coordonnée par coordonnée : $u_x = v_y \vee v_z$, $u_y = v_x \vee v_z$ et $u_z = v_x \vee v_y$.
- On colorie en noir les sommets u_x, u_y, u_z et les sommets u du squelette de P qui sont à la rencontre de trois arêtes qui quittent toutes trois u vers des coordonnées négatives. On les appelle les *points saillants* de P^w .
- On colorie en blanc les sommets v_x, v_y, v_z et les sommets du squelette de P qui sont à la rencontre de trois arêtes qui quittent toutes trois v vers des coordonnées positives. On les appelle les *creux* de P .
- On dessine les arêtes : un sommet blanc v est relié à un sommet noir u lorsque, coordonnée à coordonnée, on a $v \leq u$. Le graphe sous-jacent est donc biparti.

Un polyèdre en coin est dit *rigide* lorsque la carte bipartie S' obtenue par la construction précédente ne voit aucune de ses arêtes se croiser. À la figure 35 on donne un exemple de polyèdre en coin qui n'est pas rigide, et de deux polyèdres en coin rigides.

Dans le cas où P est rigide, on va compléter et décorer S' en un étiquetage de Schnyder $\mathcal{C}$. On remarque que dans S' , toutes les arêtes $e = \{u, v\}$ sont telles que les sommets u et v partagent exactement une coordonnée (car e est inscrite dans un flat). On colorie alors e en bleu (resp. en vert, resp. en rouge) lorsque u et v partagent la

w. Moralement, il s'agit des points de P sur lesquels on se fait mal en tombant dessus.

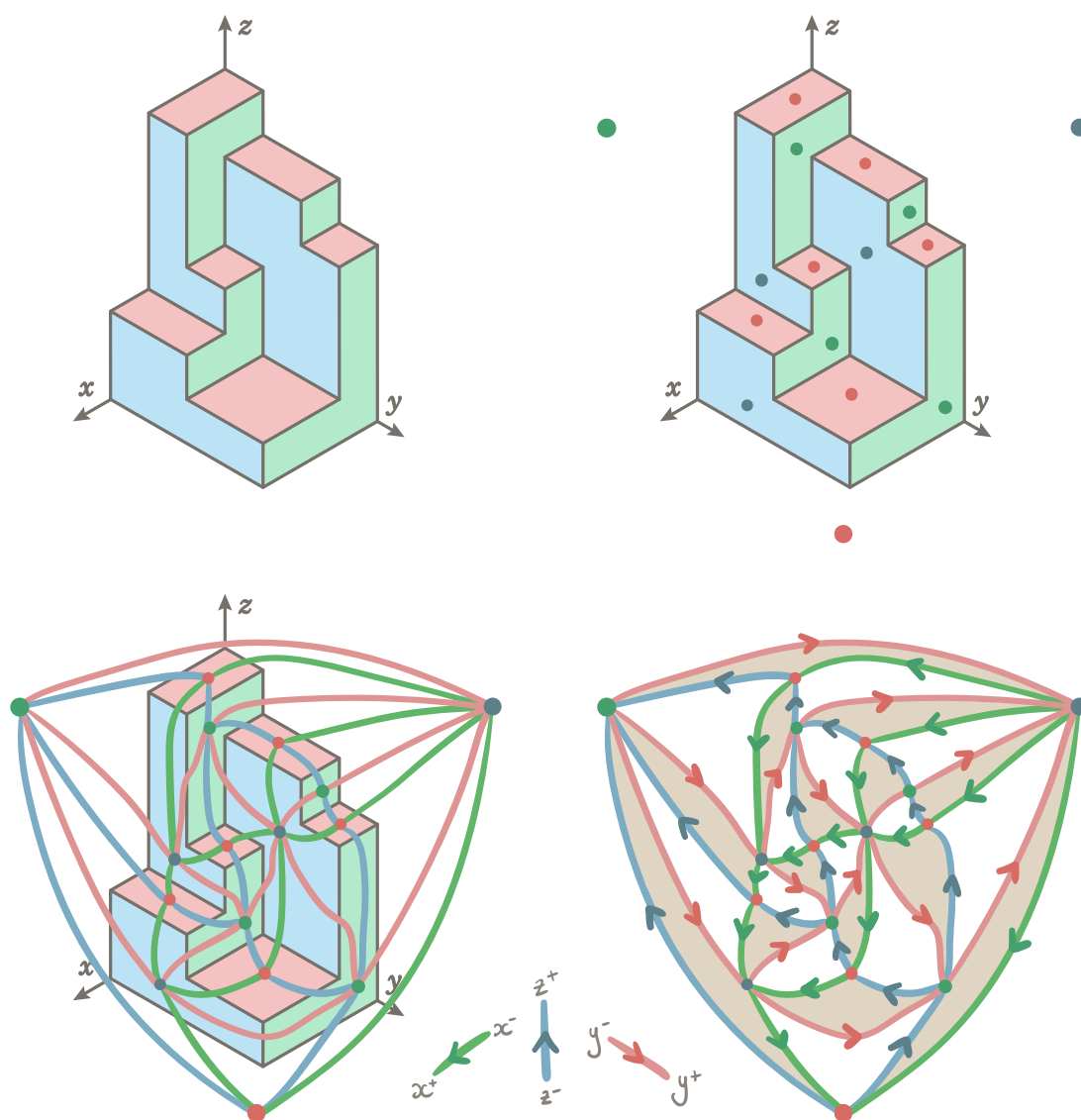


FIGURE 33 – Illustration de la correspondance entre les polyèdres en coin et les orientations polyédrales.

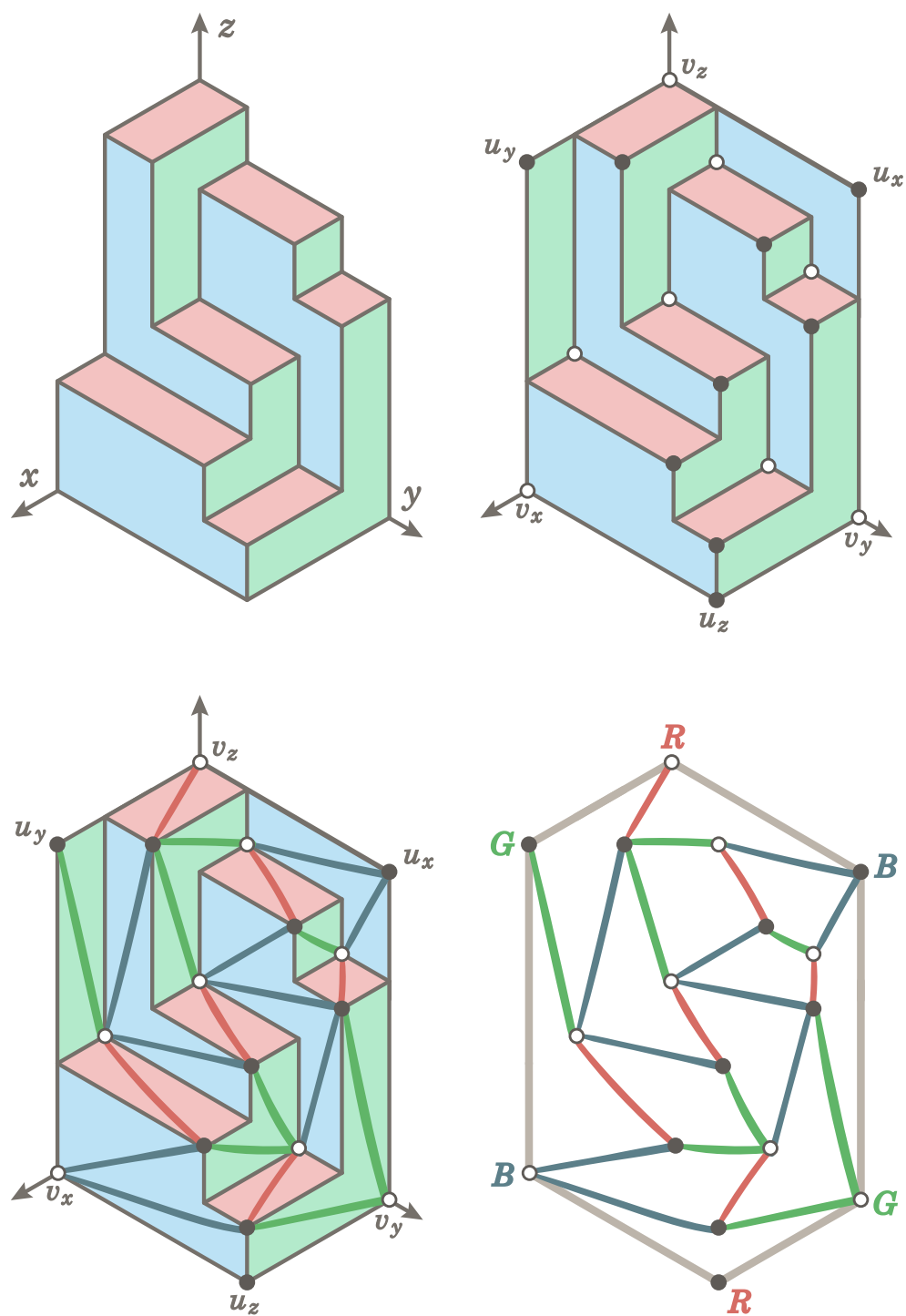


FIGURE 34 – La correspondance, étape par étape, pour passer d'un polyèdre en coin rigide à un étiquetage de Schnyder.

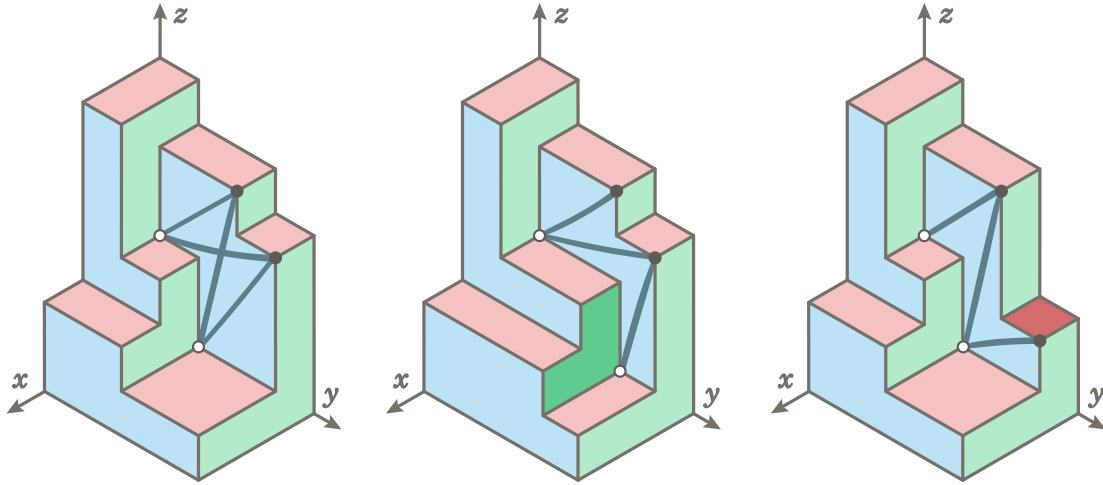


FIGURE 35 – Trois représentations du même polyèdre en coin (au sens des orientations polyédrales). À gauche, une représentation qui n'est pas rigide ; au centre et à droite, deux représentations rigides. On a marqué le flat qu'on a déplacé pour obtenir une représentation rigide.

coordonnée x (resp. y, z). Autrement dit, e prend la couleur du flat dans lequel elle est inscrite. Enfin, on rajoute des arêtes non-coloriées sur les sommets $v_z, u_y, v_x, u_z, v_y, u_x$ (renommés R, G, B, R, G, B) pour former un étiquetage de Schnyder de $\tilde{\mathcal{S}}$ (voir la seconde ligne de la figure 34).

Dans [Fel03 ; FZ08] il est montré qu'il est possible d'obtenir tous les éléments de $\tilde{\mathcal{S}}$ à partir de cette construction. On peut alors voir les étiquetages de Schnyder ayant leurs sommets blancs non-isolés comme le type combinatoire des polyèdres en coin rigides, et le nombre $\tilde{s}_n$ compte le nombre de types combinatoires des polyèdres en coin rigides ayant $n + 3$ flats. De même $\tilde{s}_{a,b}$ compte ceux qui ont $a - 2$ creux et $b - 2$ points saillants.

Remarque 19. La condition de rigidité est une condition sur la manière de représenter le polyèdre en coin. Aussi, si on prend *un* polyèdre en coin (au sens de son type combinatoire donné par les orientations polyédrales), alors il est souvent possible de lui associer plusieurs représentations rigides, qui induiront donc plusieurs étiquetages de Schnyder (voir figure 35). Par ailleurs, il est toujours possible d'associer une représentation rigide à un polyèdre en coin. Comme on le confirmera à la Remarque 59 (p.155), on a une inégalité naturelle : $p_n \leq \tilde{s}_n$ entre le nombre d'orientations polyédrales et le nombre d'étiquetages de Schnyder dont les sommets blancs ne sont pas isolés.

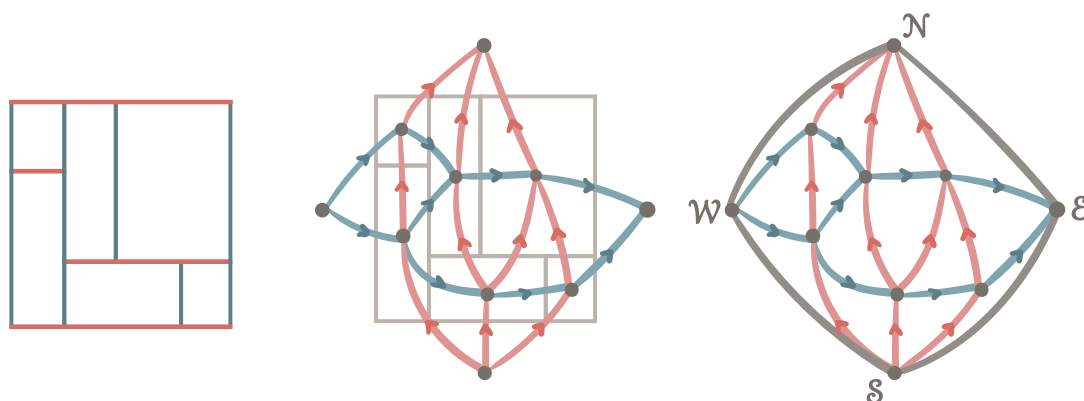


FIGURE 36 – Lien entre les pavages rectangulaires (à gauche) et les structures transverses triangulées (à droite).

IV.3 Lien avec les systèmes de contact

Dans ce paragraphe, on raconte comment les modèles de cartes décorées que l'on étudie ici peuvent être mis en relation avec des *systèmes de contact de courbes* rectangulaires ou triangulaires. Pour les orientations bipolaires planes et les structures transverses ces résultats sont déjà connus. En ce qui concerne les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder ces relations sont dues à [Gon19] pour le cas libre et [GLP12] pour le cas rigide.

Structures transverses et pavages rectangulaires On sait [KH97] que les structures transverses triangulées apparaissent naturellement comme le dual de pavages rectangulaires. Étant donné un pavage rectangulaire, on colorie en rouge les arêtes qui traversent les côtés horizontaux d'un rectangle et en bleu celles qui traversent les côtés verticaux ; de même on colorie les arêtes du bas vers le haut et de la gauche vers la droite (voir figure 36). On leur associe naturellement un *système de courbe rectangulaire rigide* en coloriant les côtés horizontaux en rouge et les côtés verticaux en bleu. La règle pour le système de courbes est la suivante : les contacts se font nécessairement entre l'extrémité et l'intérieur de deux courbes de couleurs différentes (à l'exception des quatre courbes extérieures qui forment ensemble un rectangle). Le système de courbe est dit rigide car il n'est pas possible de faire *glisser* les séparateurs librement et l'ordre des contacts de part et d'autre d'une courbe compte (voir figure 37). Cette dernière propriété n'apparaît pas dans le modèle *libre* que l'on présente juste après pour les orientations bipolaires planes.

Pour obtenir les structures transverses génériques, on peut également autoriser quatre rectangles à se croiser de manière "dégénérée", ce qui correspond alors à des faces internes de degré 4 dans les structures transverses (voir figure 38). On n'associera pas ces pavages à des systèmes de contact de courbes.



FIGURE 37 – L'ordre des contacts de part et d'autre d'une courbe compte.

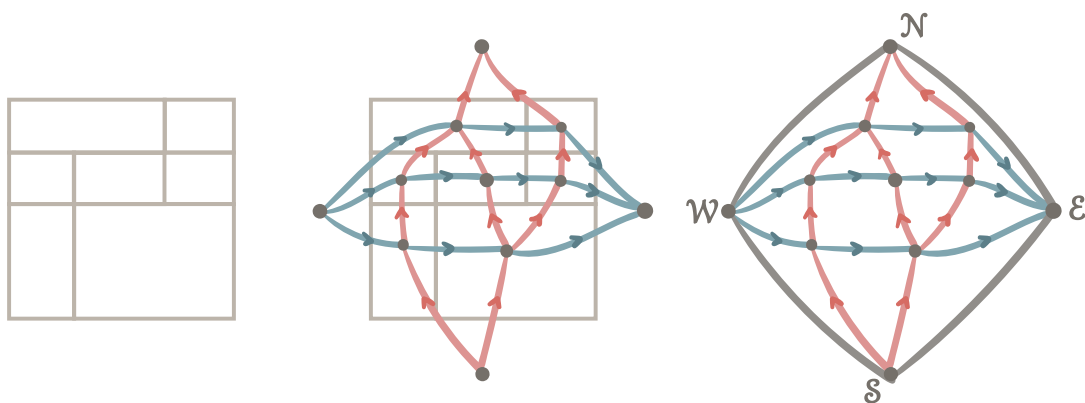


FIGURE 38 – Lien entre les pavages rectangulaires qui autorisent des croisements "dégénérés" (à gauche) et les structures transverses génériques (à droite).

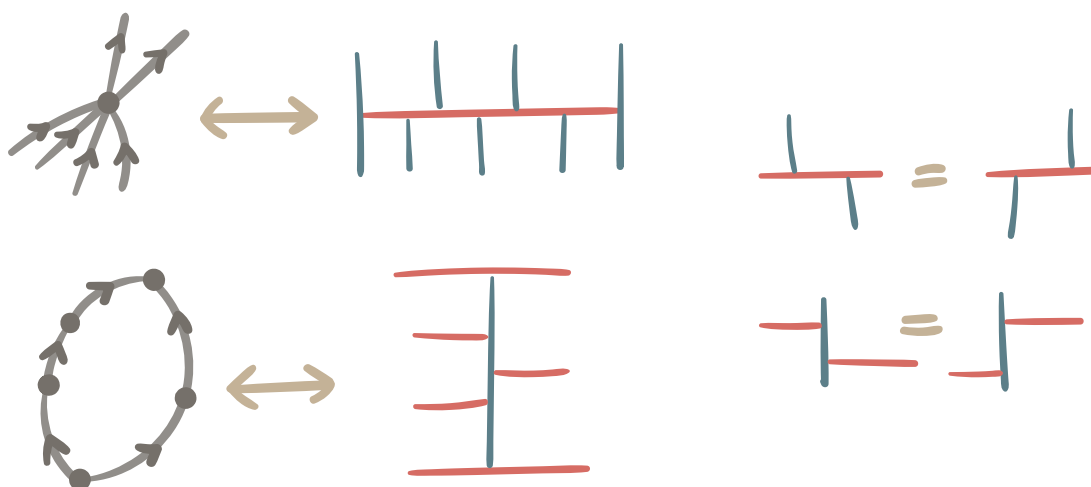


FIGURE 39 – À gauche, les règles de traduction des sommets et des faces des orientations bipolaires planes en courbes rouges et bleues dans le système de contacts de courbes. Le système est libre et les contacts peuvent glisser le long des courbes (voir à droite).

Système de contacts libres pour les orientations bipolaires planes On peut également associer aux orientations bipolaires planes un système de courbes ; on dessine des séparateurs horizontaux rouges pour les sommets de l'orientation bipolaire plane et des séparateurs verticaux bleus pour ses faces (voir figure 39). Cette construction est très liée à celle des diagrammes de visibilité des graphes planaires. On dira que ces systèmes de contacts rectangulaires sont *libres* par opposition à ceux donnés pour les structures transverses. En effet, ici seul compte l'ordre entre les contacts qui sont d'un même côté d'une courbe. On donne un exemple d'une construction de système de contact rectangulaire libre à partir d'une orientation bipolaire plane à la ligne une de la figure 42.

Systèmes de contacts triangulaires libres et rigides De la même manière on met en relations les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder, qui sont dans $\mathcal{S}_n$, avec des systèmes de courbes où, cette fois-ci, on autorise trois couleurs de courbes : rouges, vertes et bleues. Ici on demande à ce que les points de contacts soient tels que deux extrémités de deux courbes rencontrent l'intérieur d'une troisième courbe. De plus, les courbes apparaissent dans cet ordre dans le tour horaire autour des points de contact : rouge, bleu, puis vert. De la même manière que dans le cas rectangulaire, on a une exception pour les trois courbes extérieures qui forment ensemble un triangle. On parle alors de *système de contact triangulaire* puisque les formes délimitées par ces courbes définissent des triangles.

Aussi, les orientations polyédrales peuvent être mises en relation avec ces systèmes de contacts triangulaires en utilisant les règles de traduction données à la figure 40. De même, on associe aux étiquetages de Schnyder ce genre de systèmes

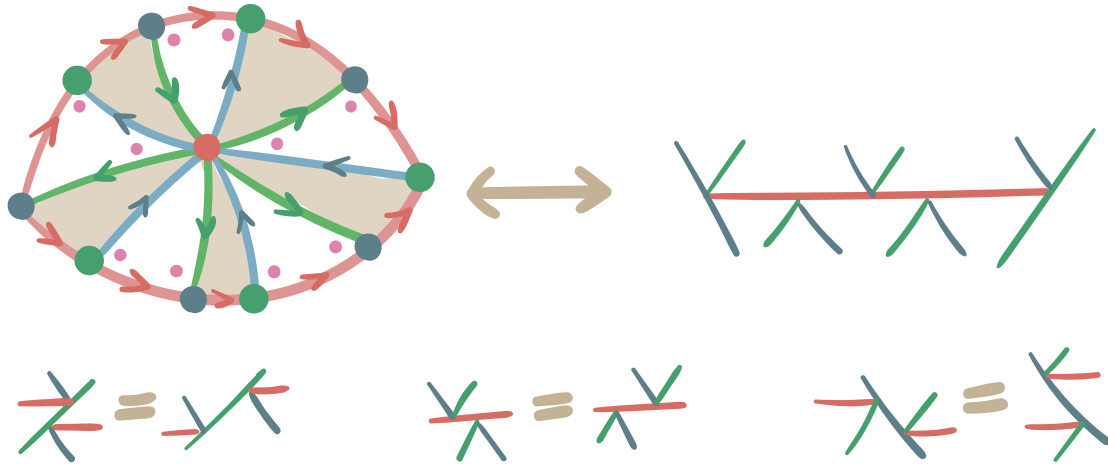


FIGURE 40 – Au-dessus, la règle pour traduire les orientations polyédrales en système de contact de courbes triangulaires libres; chaque courbe correspond à un sommet. On peut alors faire glisser librement les contacts le long des courbes (voir au-dessous).

de contacts en utilisant les règles données à la figure 41. Comme pour le cas rectangulaire, les deux systèmes de contacts que l'on associe se distinguent l'un de l'autre selon leurs règles de *glissement*. Les orientations polyédrales définissent des systèmes de contacts *libres* où il est possible de faire glisser les contacts le long d'une courbe du moment que l'ordre sur les contacts qui sont du même côté de la courbe est préservé. A contrario, les étiquetages de Schnyder induisent des systèmes de contacts *rigides* où il est nécessaire de conserver un ordre sur l'ensemble des contacts de part et d'autre d'une courbe. Les étiquetages de Schnyder qui sont dans $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont leurs trois sommets externes blancs non-isolés; cette condition est nécessaire pour éviter que deux courbes extérieures ne se rencontrent en leur intérieur et ne forment un point de pincement.

On résume à la figure 42 les relations avec des systèmes de contacts rectangulaires et triangulaires, libres ou rigides pour les quatre familles de cartes décorées qui définissent leur type combinatoire.

IV.4 Algorithmes de dessin

Étant donné un graphe planaire ou une carte, la question se pose de savoir comment on peut effectivement les représenter dans le plan sans que les arêtes ne se croisent. La question classique est celle des tracés en lignes droites, où toutes les arêtes sont des segments rectilignes. I. Fáry a montré en 1948 que tout graphe planaire admettait un tel tracé en lignes droites [Fár48]. Par la suite, de nombreux algorithmes de dessin ont été donnés [Bat+94]. Dans ce paragraphe on donne des algorithmes de dessin qui font usage des structures combinatoires de notre étude.

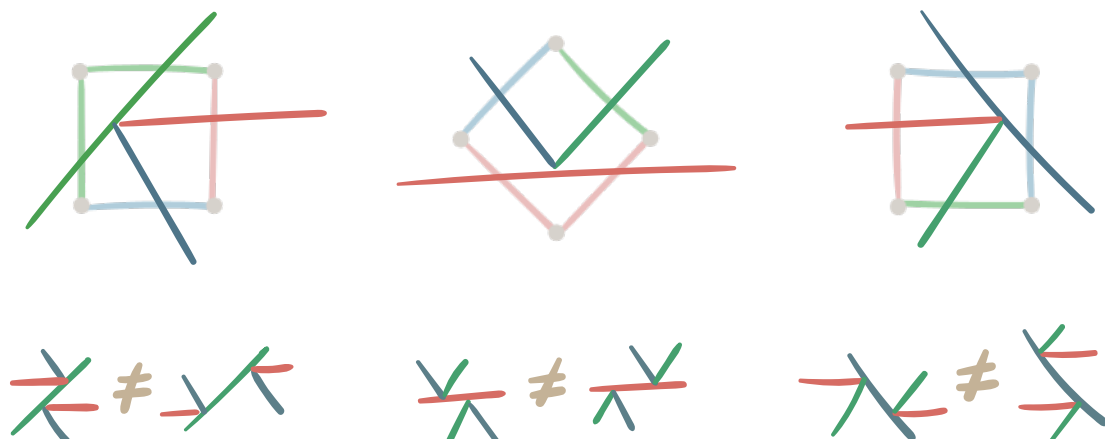


FIGURE 41 – Les règles pour construire un système de contact de courbes, triangulaire et rigide, à partir des faces d'un étiquetage de Schnyder (en haut). L'ordre des contacts, de part et d'autre des courbes, compte (en bas).

Dessin à l'aide de bois de Schnyder triangulés W. Schnyder donne un algorithme de dessin des triangulations simples [Sch89 ; Sch90]. Il s'agit, dans un premier temps, de donner une structure de bois de Schnyder triangulé à notre triangulation ; ceci peut être fait en temps linéaire à l'aide d'un algorithme dû à E. Brehm [Bre00] (voir un exemple à la figure figure 43). Dans un second temps on donne effectivement les coordonnées des sommets, on s'appuie alors sur le résultat suivant [Sch90] :

Proposition 13. *Soit $\mathcal{W}$ un bois de Schnyder triangulé, soit v un sommet interne de $\mathcal{W}$. On note $P_r(v)$ le chemin qui relie v au sommet externe rouge R , il est unique et est donné par T_r (voir Proposition 8, p.34). On définit de même $P_b(v)$ et $P_v(v)$. Alors les trois chemins $P_r(v)$, $P_b(v)$ et $P_v(v)$ ne se croisent qu'en v .*

Soit v un sommet interne du bois de Schnyder triangulé, les chemins $P_r(v)$, $P_b(v)$ et $P_v(v)$ découpent la carte en trois régions, disons rouge, verte, et bleue (selon la couleur du sommet externe qu'elle ne contient pas, voir figure 44). On dessine alors v aux coordonnées $(v(v), z(v))$ où $v(v)$ (resp. $z(v)$) compte le nombre de faces dans la région verte (resp. rouge)^x. Cet algorithme de dessin sous forme de tracés en ligne droite a, par la suite, été amélioré, on pourra par exemple citer [BFM07].

Dessin à l'aide de structures transverses Dans son article [Fus09], É. Fusy donne un algorithme de tracé en ligne droite pour les triangulations irréductibles et que l'on décrit brièvement ici. Il n'est pas difficile d'encapsuler une telle triangulation dans un 4-gone. On dispose ensuite d'un algorithme en temps linéaire qui colorie et oriente les arêtes de notre triangulation de manière itérative pour obtenir une

x. Le nombre $b(v)$ de faces dans la région bleue constitue une information redondante, puisque $z(v), b(v), v(v)$ somment au nombre total de faces.

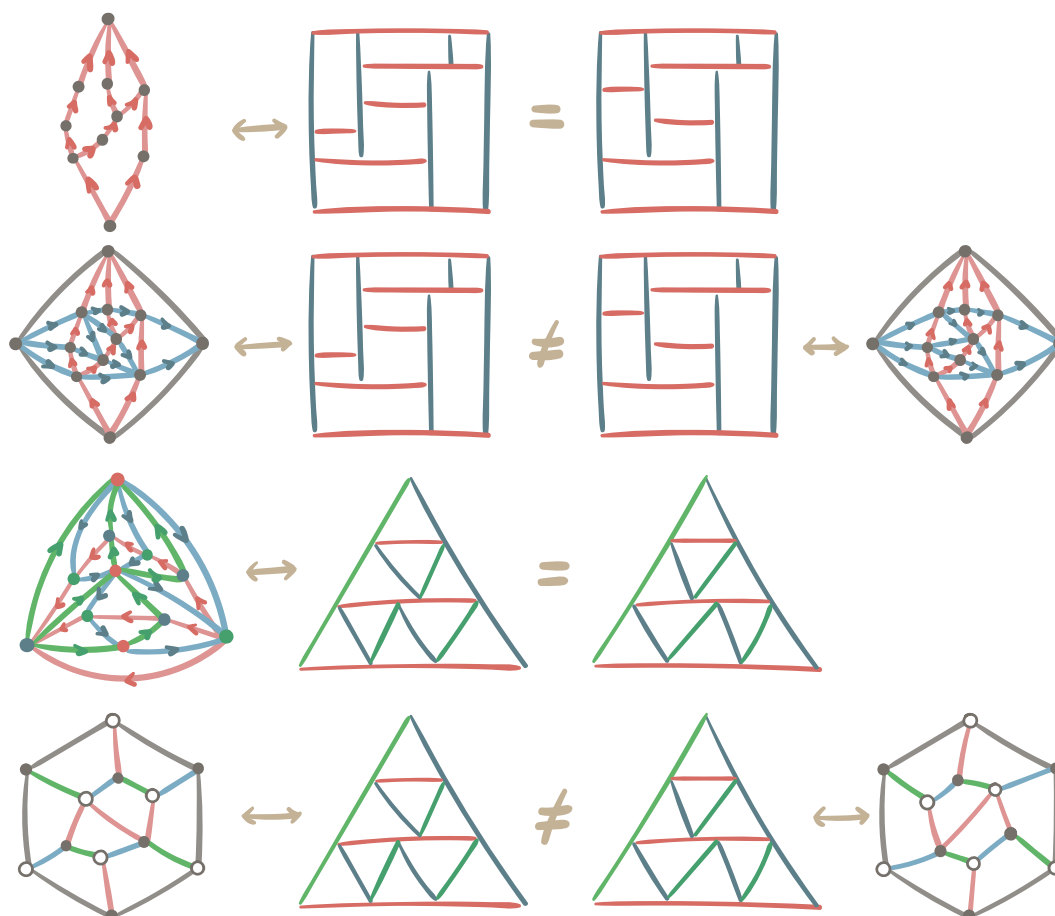


FIGURE 42 – Exemples de correspondances entre chacun des quatre modèles de cartes décorées et des systèmes de contacts de courbes. De haut en bas : avec une orientation bipolaire plane, avec une structure transverse, avec une orientation polyédrale, avec un étiquetage de Schnyder.

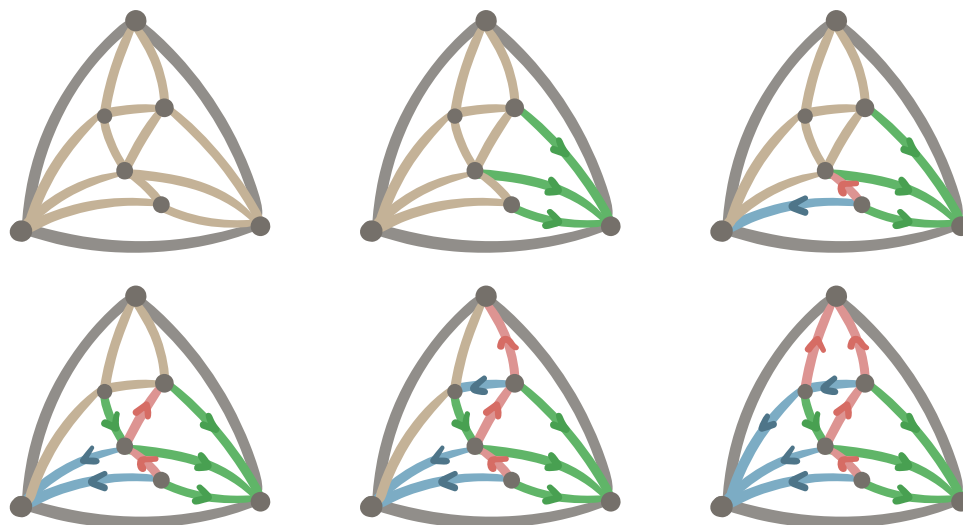


FIGURE 43 – Algorithme de Brehm pour calculer le bois de Schnyder triangulé *minimal* associé à une triangulation.

structure transverse $\mathcal{X}$ (voir un exemple à la figure 45). Par la suite on donne les coordonnées d'un sommet v de $\mathcal{X}$ de la manière suivante. Dans la carte induite par les arêtes rouges de $\mathcal{X}$ on note $P_r^{\text{out}}(v)$ (resp. $P_r^{\text{in}}(v)$) le chemin des arêtes sortantes (resp. entrantes) les plus à gauche (resp. droite) et qui relie v à $\mathcal{N}$ (resp. qui relie $\mathcal{S}$ à v). On écrit $P_r(v)$ la concaténation de $P_r^{\text{in}}(v)$ et $P_r^{\text{out}}(v)$ et on définit $P_b(v)$ de la même manière dans la carte induite par les arêtes bleues. Enfin, on donne à v la coordonnée (x, y) , où x (resp. y) est le nombre de faces rouges (resp. bleues) à gauche de $P_r(v)$ (resp. à droite de $P_b(v)$). On donne une illustration à la figure 46.

Diagrammes de visibilité et orientations bipolaires planes Outre les tracés en ligne droite, une autre manière d'appréhender les questions du dessin des graphes planaires peut être faite à l'aide de diagrammes de visibilité. Le *diagramme de visibilité* d'un graphe planaire G est une représentation de G où ses sommets sont donnés par des segments horizontaux, et où ses arêtes sont données par des segments verticaux. On demande à ce que le segment vertical d'une arête $\{v, v'\}$ ne s'intersecte avec aucun autre segment que ceux qui représentent v et v' (voir un exemple à la figure 47).

Le lien entre les orientations bipolaires planes et des diagrammes de visibilité sont connus depuis longtemps [Ros89], et la réalisation du diagramme de visibilité sous forme d'orientation bipolaire plane est souvent la première étape pour en donner une représentation graphique. Des algorithmes de dessin en temps linéaire existent pour ces objets là [TT86]. On ne donne pas ici de description de tels algorithmes mais ces diagrammes de visibilité sont liés de très près aux systèmes de contact rectangulaires libres pour les orientations bipolaires planes tels que décrits au paragraphe IV.3

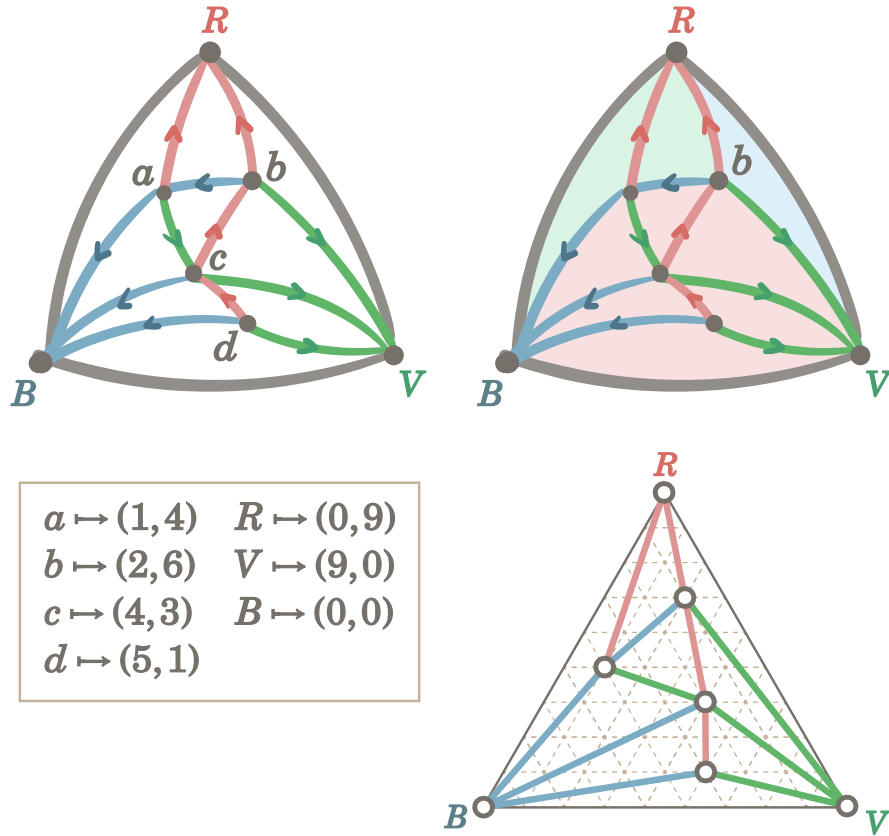


FIGURE 44 – On dessine alors v aux coordonnées $(v(v), z(v))$, en comptant le nombre $v(v)$ (resp. $z(v)$) de faces dans la région verte (resp. rouge).

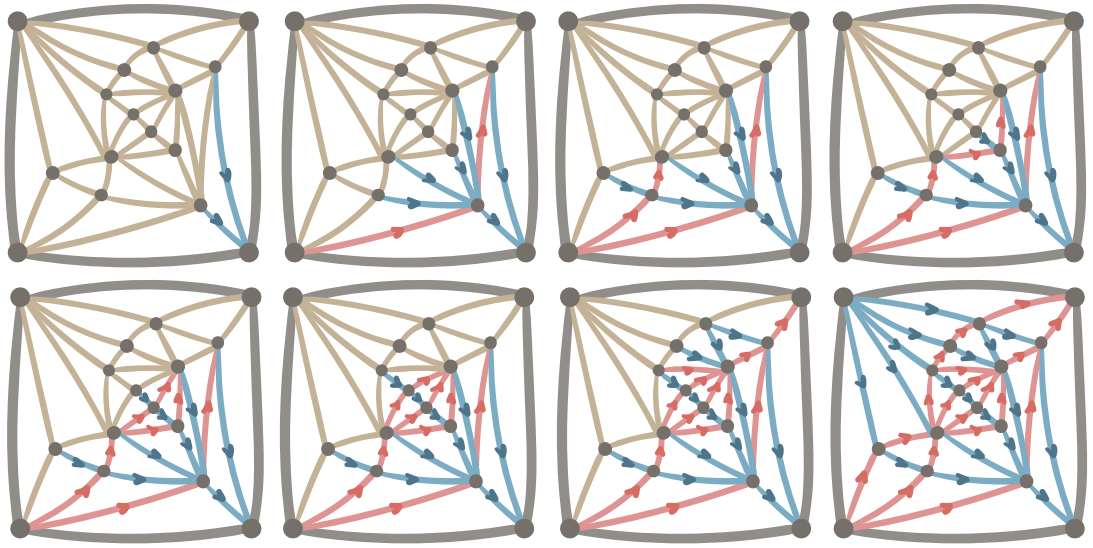


FIGURE 45 – On construit itérativement la structure transverse *minimale* associée à la triangulation irréductible du 4-gone.

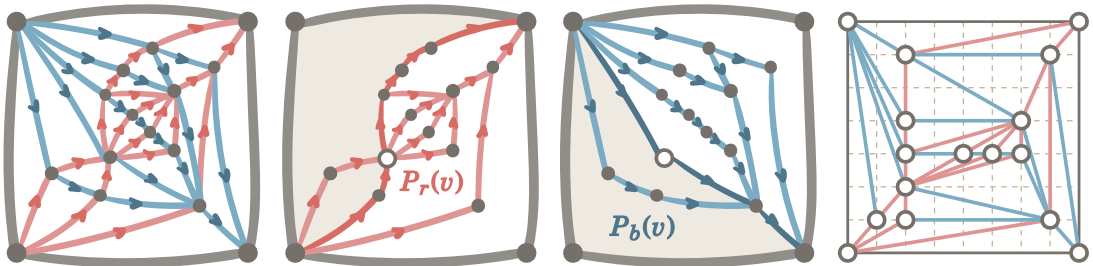


FIGURE 46 – On dessine chaque sommet v à la coordonnée (x, y) , où x (resp. y) est le nombre de faces rouges (resp. bleues) à gauche de $P_r(v)$ (resp. à droite de $P_b(v)$).

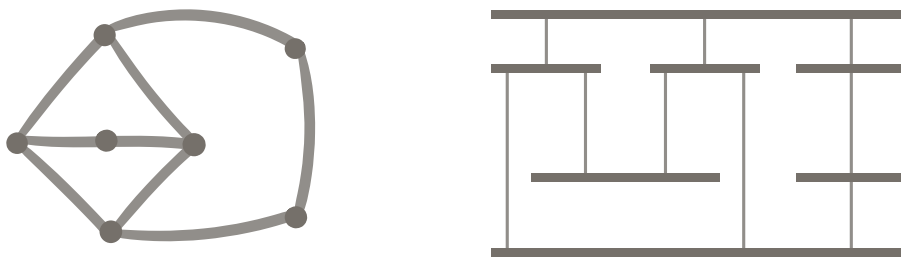


FIGURE 47 – À gauche un graphe planaire G et à droite une représentation de G sous forme de diagramme de visibilité.

(p.52).

V Marches tandems et bijection KMSW

Ici on présente une bijection introduite par R. Kenyon, J. Miller, S. Sheffield, et DB Wilson dans [Ken+19] qui donne une correspondance entre les orientations bipolaires planes, que l'on a présentées à la section II, et des marches, dites *tandems*, dans le quart de plan. On appellera ce résultat la *bijection KMSW*. D'autres énoncés bijectifs concernant les orientations bipolaires planes sont d'ores et déjà connus. On peut notamment citer la bijection de [BBF08], qui met en relation les orientations bipolaires planes et les *permutations de Baxter* qui évitent les motifs barrés $2\overline{4}13$ et $3\overline{1}42$. On a également une bijection avec des triplets de chemins sur l'ensemble des pas $\{N, E\}$ qui ne se croisent pas [FPS09].

Toutefois la bijection KMSW a cela de particulier qu'elle donne un contrôle fort sur le degré des faces, et même les longueurs des chemins latéraux de celles-ci. On donne ici un énoncé de cette bijection et par la suite on propose une description des constructions qui permettent de décrire une orientation bipolaire plane à l'aide de marches tandems et vice versa.

V.1 Définitions et énoncé de la bijection KMSW

Définition 20. On appelle *marche tandem* une marche sur la grille $\mathbb{Z}^2$ ayant ses pas dans $\{SE\} \cup \{(-i, j), i, j \geq 0\}$. Dans une telle marche, on appelle *pas-face* tout pas de la forme $(-i, j)$ avec $i, j \geq 0$.

Définition 21. Soit f une face d'une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$, on dit que f est de *type* (i, j) lorsque son bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) est de longueur $i + 1$ (resp. $j + 1$). On appelle *type extérieur* de $\mathcal{B}$ le type de la face extérieure de $\mathcal{B}$. On appelle *pôle-type* de $\mathcal{B}$ le couple (p, q) où $p + 1$ est de degré de $\mathcal{S}$ et $q + 1$ est le degré de $\mathcal{N}$ (voir figure 48).

Théorème 14. *On a une bijection entre les orientations bipolaires planes et les marches tandems dans le quart de plan (à savoir $\{x, y \geq 0\}$). Plus précisément on a une bijection entre :*

<i>Les orientations bipolaires planes ayant les paramètres suivants :</i>	<i>Les marches tandems dans le quart de plan ayant :</i>
• $m + 1$ arêtes, • $n + 2$ sommets, • un type extérieur (a, b);	• m pas au total, parmi lesquels • n pas SE, • partant de $(0, a)$ et terminant en $(b, 0)$.

De plus, chaque pas-face $(-i, j)$ de la marche tandem correspond à une face de type (i, j) dans l'orientation bipolaire plane correspondante. On appelle cette bijection la bijection KMSW en référence à ses auteurs.

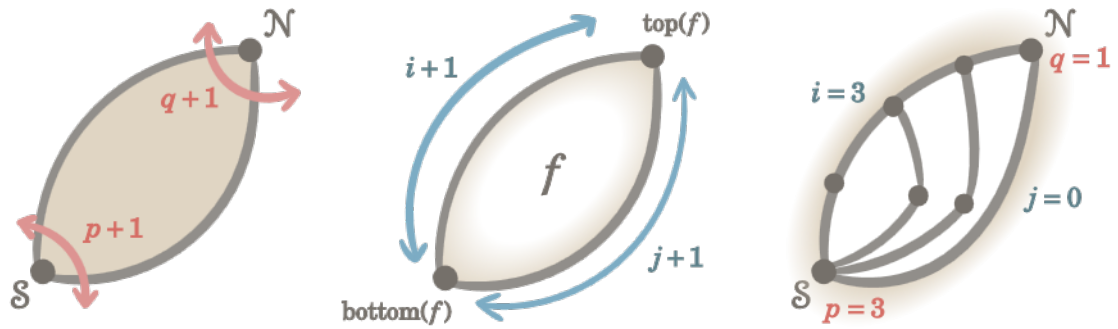


FIGURE 48 – Une illustration du concept de pôle-type d'une orientation bipolaire plane (à gauche); du concept de type d'une face (au centre); et un exemple de pôle-type et de type de la face extérieure d'une orientation bipolaire plane (à droite).

On donne au paragraphe suivant une description des deux sens de la bijection, ainsi qu'une illustration des constructions associées.

V.2 Description de la bijection et propriétés

On commence par la construction des orientations bipolaires planes à partir des marches tandems dans le quart de plan. Il s'agit du point de vue que nous allons principalement adopter dans le reste de notre exposé.

Des marches tandems vers les orientations bipolaires planes Étant donné w une marche tandem dans le quart de plan, qui démarre en $(0, a)$ et qui se termine en $(b, 0)$, on va construire incrémentalement son image $\mathcal{B}$ en lisant les pas de w un à un. On procède comme suit :

- a. On démarre avec $\mathcal{B}$ réduit à son plus simple appareil : une seule arête orientée reliant le pôle sud $\mathcal{S}$ au pôle nord $\mathcal{N}$.
- b. Durant la construction, on va maintenir un sommet marqué v^* , qui se trouvera sur le bord latéral droit de la face extérieure f_{ext} de $\mathcal{B}$ (et qui ne sera jamais en $\mathcal{S}$). Au tout début, on commence avec $v^* = \mathcal{N}$.
- c. On lit ensuite les pas de la marche w un à un, on procède différemment selon le pas rencontré.
 - (a) Si le pas lu est un pas SE, alors on fait remonter le sommet marqué v^* d'une arête le long du bord latéral droit de f_{ext} . Si v^* était déjà en $\mathcal{N}$, alors on ajoute une arête sortante en $\mathcal{N}$ puis l'on délocalise v^* à la cible de cette nouvelle arête qui devient également le nouveau pôle nord $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}$.
 - (b) Si on rencontre un pas-face de la forme $(-i, j)$, alors on ajoute une face f de type (i, j) à $\mathcal{B}$, de telle sorte que $\text{top}(f)$ soit situé en v^* et que le bord latéral gauche de f soit recollé le long du bord latéral droit de f_{ext} . On s'assure

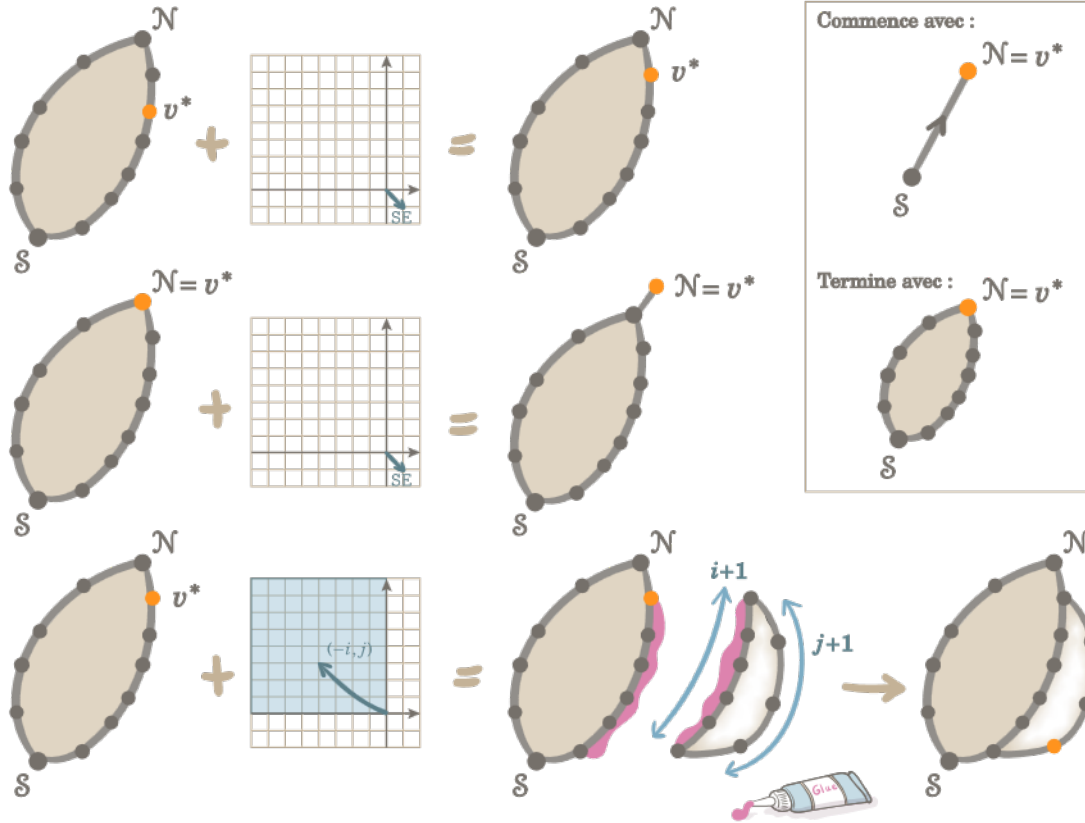


FIGURE 49 – Les règles de construction d’une orientation bipolaire plane à partir d’une marche tandem, via la bijection KMSW. Le sommet marqué v^* est noté en orange.

à la Remarque 22 que la taille $i + 1$ du bord latéral gauche de f est bien plus petit que la longueur du bord latéral droit de f_{ext} qui relie S à v^* ; on verra que cela revient à demander à ce que la marche reste dans le quart de plan. Une fois la face f collée, on déplace le sommet marqué v^* en haut de la première arête sur le bord latéral droit de f .

- d. Pour que la construction puisse se terminer, on demande à ce que, à la fin de la marche, le sommet marqué v^* soit revenu en N .

On peut trouver, à la figure 49, une illustration des règles de construction que l’on vient de donner. On donne également à la figure 50 un exemple étape par étape de cette bijection.

Remarque 22. Il est possible de retrouver la position courante du sommet marqué v^* à tout moment de la construction, à partir de la position courante (x, y) de la marche tandem. On note $y_{\min}$ l’ordonnée minimale rencontrée jusqu’à présent. Alors, la longueur du chemin entre S et v^* sur le bord latéral droit de f_{ext} vaut $x + 1$. Et la longueur du chemin entre v^* et N le long de ce même bord est $y - y_{\min}$ (voir figure 51).

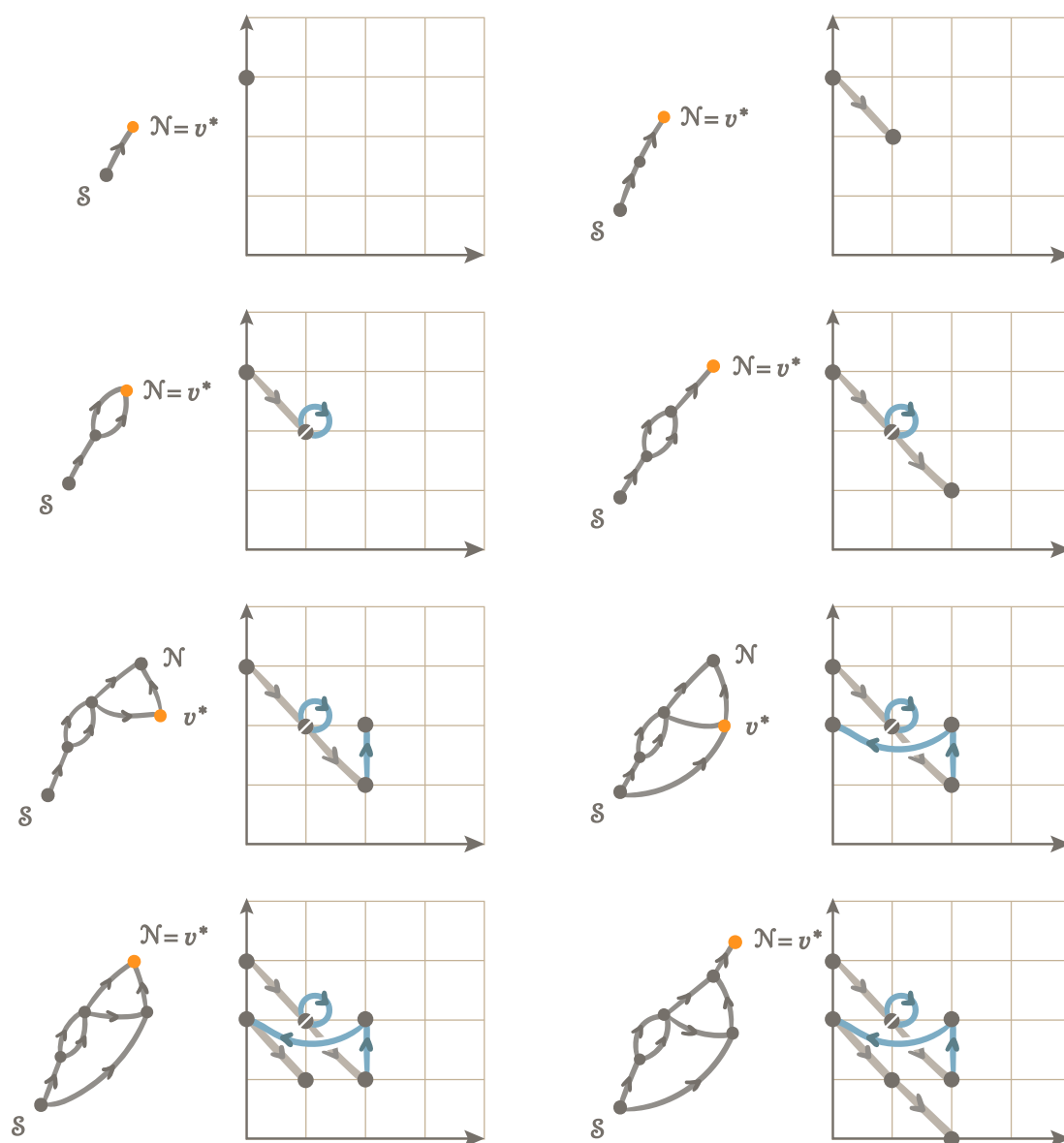


FIGURE 50 – Un exemple étape par étape de la bijection KMSW.

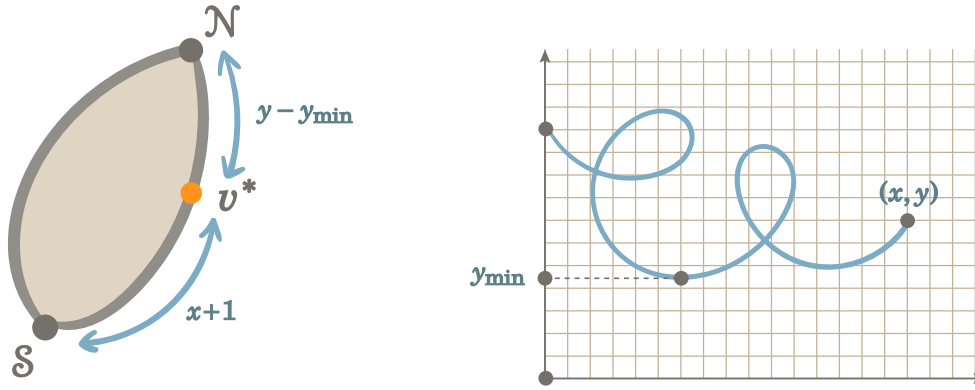


FIGURE 51 – Il est possible de retrouver la position courante du sommet marqué v^* à partir de la position courante (x, y) .

Remarque 23. On note que, si l'on prend la marche w à rebours, la construction que l'on vient de donner nous fournit un ordre sur les faces de $\mathcal{B}$, ce qui peut nous donner un algorithme d'épluchage de l'orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ (voir figure 52). Comme on l'a vu à la section I, les méthodes d'épluchage permettent d'obtenir des décompositions simples de familles de cartes, qui peuvent ensuite induire des résultats d'énumération. Dans la suite on applique la bijection KMSW à des familles de cartes diverses et l'ordre des pas pourra à nouveau être interprété comme un algorithme d'épluchage de ces objets.

Depuis les orientations bipolaires planes vers les marches tandems Soit maintenant $\mathcal{B}$ une orientation bipolaire plane de type (a, b) , on construit une marche tandem w dans le quart de plan de la manière qui suit.

- a. On commence par dessiner T_r , l'arbre le plus à droite de $\mathcal{B}$ en ne gardant que l'arête entrante la plus à droite pour tous les sommets de $\mathcal{B}$ (hormis N qui est exclu de cette construction). Les arêtes qui ne sont pas dans T_r sont dessinées en gris (voir figure 53).
- b. On fait le tour de T_r dans le sens horaire, et on ajoute des pas à notre marche w , en partant de $(0, a)$:
 - (a) Si on longe une arête de T_r pour la première fois, on ajoute un pas SE ;
 - (b) Si on rentre dans une face f de $\mathcal{B}$ de type (i, j) (de manière équivalente : si l'on croise pour la première fois une arête grise de $\mathcal{B}$) alors on ajoute un pas-face $(-i, j)$ à w .

On dessine cette construction à la figure 53.

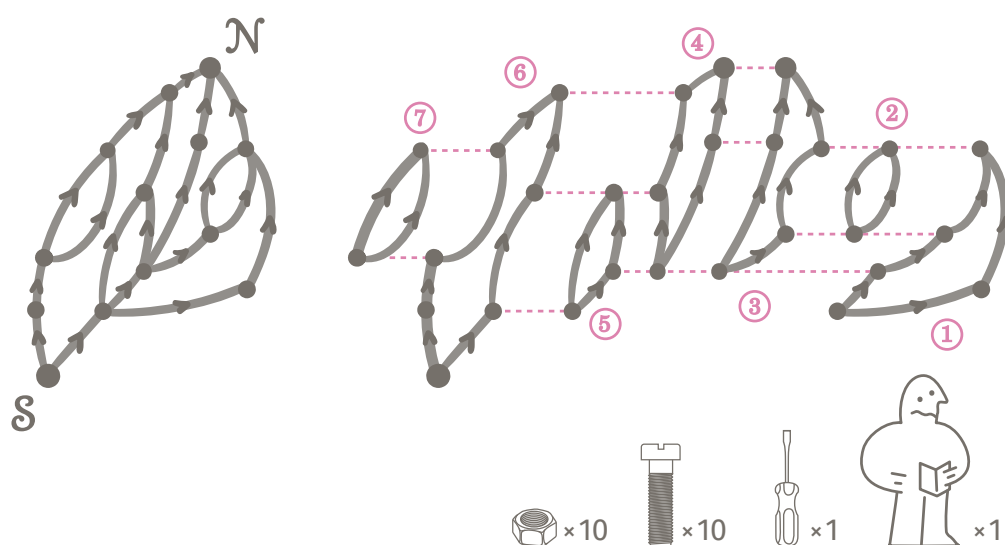


FIGURE 52 – La construction KMSW induit un ordre sur les faces de l'orientation bipolaire plane, et donc un algorithme d'épluchage.

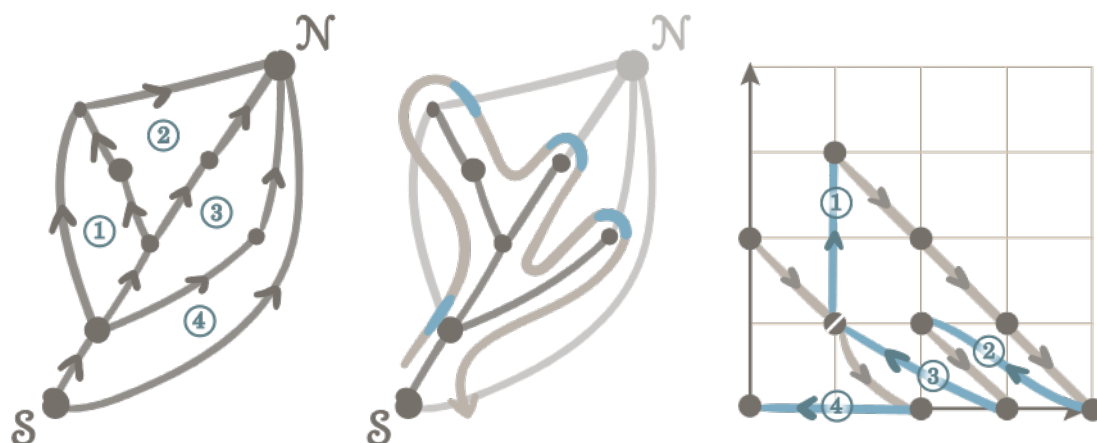


FIGURE 53 – On construit la marche tandem à partir de l'arbre le plus à droite T_r de $\mathcal{B}$.

VI Énumération asymptotique des marches contraintes

Dans cette section, on présente succinctement la méthode d'énumération de marches contraintes qui est donnée par A. Bostan, K. Raschel, et B. Salvy [BRS14] (cette méthode s'appuie elle-même sur les résultats de D. Denisov and V. Wachtel [DW15]). La version que l'on présente ici est simplifiée et adaptée aux marches tandems (présentées à la section précédente), notamment à des marches tandems *pondérées* que nous définirons à la section B.1 (p.110) et compléterons à la section C.1 (p.135). Cette simplification s'inspire des travaux de [BFR21], qui utilise également cette méthode sur des marches tandems, en exploitant la symétrie des pas pondérés le long de l'axe $x = -y$.

Soit $\mathcal{S}_t = \{\text{SE}\} \cup \{(-i, j), i, j \geq 0\}$ l'ensemble des pas des marches tandems et soit $\omega : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application telle qu'on ait la symétrie $\omega(i, j) = \omega(j, i)$. On s'intéresse aux marches sur $\mathcal{S}_t$ dont le poids est 1 pour le pas SE, et $\omega(i, j)$ pour le pas $(-i, j)$. On note $a_n^{(\omega)}$ le ω -nombre de marches tandems (on compte chaque marche w avec un poids $\prod_{s \in w} \omega(s)$, voir p.135), de longueur n , contraintes à rester dans le quart de plan, et dont les points de départs et d'arrivée sont donnés. On pose également :

$$S(z; x, y) = \frac{x}{y} z^{-2} + \sum_{i, j \geq 0} \omega(i, j) \frac{y^j}{x^i} z^{i+j}; \quad (6)$$

ainsi que $S(z) = S(z; 1, 1)$; et ρ le rayon de convergence de la série $S(z) - z^{-2}$, que l'on suppose strictement positif. Enfin, si γ, z_0 sont deux réels strictement positifs, et en notant $x(s), y(s)$ les coordonnées d'un pas $s \in \mathcal{S}_t$, alors on définit $\tilde{\omega}(s) = \omega(s)/\gamma z_0^{y(s)-x(s)}$ la repondération des pas de S . On s'assurera de prendre γ de sorte que $\tilde{\omega}$ définisse une loi de probabilité (c'est-à-dire que $\sum_{s \in \mathcal{S}_t} \tilde{\omega}(s) = 1$); pour cela on prend $\gamma = S(z_0)$. On veillera à prendre z_0 de sorte à ce que la marche $\tilde{\omega}$ -pondérée soit de *dérivée nul*, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[x(s)] = \mathbb{E}[y(s)] = 0$; c'est équivalent à avoir $z_0 \in]0, \rho[$ solution de $S'(z) = 0$. On a alors le résultat suivant dû à [BRS14; DW15] :

Théorème 15. *Avec les notations précédentes, le ω -nombre $a_n^{(\omega)}$ de marches tandems dans le quart de plan, qui commencent en (i_0, j_0) et terminent en (i_1, j_1) est asymptotiquement compté par :*

$$a_n^{(\omega)} \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}, \quad \text{où } \alpha = 1 + \frac{\pi}{\arccos(\xi)}, \text{ et où } \xi = -\frac{\partial_x \partial_y S(z_0; 1, 1)}{\partial_x^2 S(z_0; 1, 1)}. \quad (7)$$

Par ailleurs la constante c est strictement positive et ne dépend que des points de départ et d'arrivée qui ont été fixés. On a une dépendance de la forme $c = \kappa g(i_0, j_0) g(j_1, i_1)$, où g est une fonction strictement positive.

Remarque 24. Dans le théorème précédent, dans le cas particulier (que nous rencontrerons) où le point de départ (resp. d'arrivée) est de la forme $(0, p)$ (resp. de la forme $(q, 0)$), alors c s'écrit $c = \kappa f(p) f(q)$ pour une certaine fonction strictement positive f ; dans ce cas, on dit que c dépend séparément de p et de q .

VII Autres outils combinatoires

VII.1 Un critère de rationalité

Soit $F(z) = \sum_n a_n z^n$ la série génératrice associée à une famille combinatoire comptée par la suite des a_n ; on suppose qu'on a l'équivalent asymptotique $a_n \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$. On sait que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors nécessairement F n'est pas holonome^y.

Dans leur article [BRS14], A. Bostan, K. Raschel, et B. Salvy fournissent un critère de rationalité pour un tel coefficient α qui s'écrit sous la forme $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi)$.

Proposition 16. *Soit ξ un nombre algébrique de polynôme minimal $X(s)$ et soit $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi)$; alors α est rationnel si et seulement si le numérateur de $X((\zeta + \zeta^{-1})/2)$ admet un polynôme cyclotomique dans sa décomposition en facteurs irréductibles.*

Ce critère nous servira notamment au chapitre D, où nous obtiendrons des équivalents asymptotiques à l'aide de la méthode de [BRS14] (voir section précédente) ; ce critère nous permettra alors d'identifier des séries génératrices qui ne sont pas holonomes.

VII.2 Un calcul de mots à séparateurs

Remarque 25. Soient n et k deux entiers positifs, on considère $m_{n,k}$ le nombre de mots sur l'alphabet $\{\circ, |\}$ faisant apparaître n fois la lettre $\circ$ et k fois le séparateur $|$; la taille d'un tel mot sera le nombre n de cercles $\circ$. On a alors deux manières de compter la série $\sum_{n \geq 0} m_{n,k} \lambda^n$ des mots à k séparateurs. D'une part comme l'ensemble des mots de longueur $k + n$ où l'on dispose de k espaces parmi les $k + n$ emplacements pour placer un séparateur $|$. D'autre part comme une suite de $k + 1$ mots sur l'alphabet $\{\circ\}$ que l'on sépare ensuite à l'aide de $|$. On a donc le calcul suivant :

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} \lambda^n = \frac{1}{(1-\lambda)^{k+1}}. \quad (8)$$



^y. Une fonction est dite holonome si elle est solution d'une équation linéaire différentielle à coefficients polynomiaux.



Bijection des modèles avec des orientations bipolaires planes décorées

Sommaire

A.1	Bijection des posets plans avec les orientations bipolaires V-transverses	71
A.1.1	Définition des orientations bipolaires V-transverses et mise en bijection	71
A.1.2	Description de la bijection Φ_V	73
A.1.3	Démonstration de la Proposition A.1	75
A.2	Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les orientations bipolaires W-admissibles	77
A.2.1	Définition des orientations bipolaires W-admissibles et mise en bijection	77
A.2.2	Description de la bijection Φ_W	79
A.2.3	Démonstration de la Proposition A.2	81
A.3	Bijection des structures transverses avec les orientations bipolaires T-transverses	84
A.3.1	Définition des orientations bipolaires T-transverses et mise en bijection	85
A.3.2	Description de la bijection Φ_T	86
A.3.3	Démonstration de la Proposition A.3	87
A.4	Bijection des orientations polyédrales avec les orientations bipolaires P-admissibles	90
A.4.1	Définition des orientations bipolaires P-admissibles et mise en bijection	90
A.4.2	Description de la bijection Φ_P	92
A.4.3	Démonstration de la Proposition A.4	93
A.5	Bijection des étiquetages de Schnyder avec les orientations bipolaires S-transverses	99
A.5.1	Définition des orientations bipolaires S-transverses et mise en bijection	100

A.5.2 Description de la bijection Φ_S	103
A.5.3 Démonstration de la Proposition A.6	104

Introduction L'objectif principal de ce chapitre consiste à mettre en bijection cinq familles de cartes décorées (présentées dans l'état de l'art) avec des familles d'orientations bipolaires planes décorées.

On veut pouvoir obtenir des résultats d'énumération pour ces modèles de cartes et le but est d'utiliser au préalable la bijection (KMSW) donnée par R. Kenyon, J. Miller, S. Sheffield, et DB Wilson [Ken+19] entre les orientations bipolaires planes et des marches dites *tandems* dans le quart de plan. La bijection KMSW décrit une construction des orientations bipolaires planes face par face, avec un contrôle fin sur le type des faces ajoutées. Afin de pouvoir se servir de cette correspondance, nous allons nous assurer que la décoration sur les modèles d'orientations bipolaires planes que nous introduisons est transportable par KMSW. Pour deux des cinq modèles il s'agit de contraindre la taille des bords latéraux droits et gauches pour chaque face (orientations bipolaires dites W-admissibles, P-admissibles). Pour trois des cinq modèles (les orientations bipolaires dites V-transverses, T-transverses, S-transverses), il faudra également décorer ces faces avec des arêtes dites *transversales*. Il s'agit d'arêtes qui traversent les faces de part en part, reliant des sommets sur le bord latéral gauche à des sommets sur le bord latéral droit d'une même face. On verra au chapitre B comment transporter ces propriétés aux marches tandems.

On aborde les différents modèles les uns à la suite des autres. Dans la section A.1, on traite le cas des posets plans (des orientations bipolaires planes sans aucune arête transitive). Alors que leur décompte par nombre d'arêtes est direct, on donne ici une bijection qui permet de faire une énumération par leur nombre de sommets, en généralisant un résultat dû à E. Fusy [Fus10]. Pour les bois de Schnyder triangulés (section A.2), la correspondance fait disparaître un des trois arbres couvrants et on renverse l'orientation d'un deuxième arbre couvrant. On se retrouve alors avec des orientations bipolaires planes dont toutes les faces sont de type $(i, 1)$ pour un certain $i \geq 0$. À la section A.3, on donne une décomposition pour les structures transverses qui fait usage du fait qu'une structure transverse induit un poset plan lorsque l'on oublie l'une des deux couleurs. Enfin on traite aux sections A.4 et A.5 respectivement les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder. Ces deux derniers modèles ont de particulier qu'ils peuvent être ramenés à des orientations bipolaires planes biparties. Mais leur spécificité principale tient au fait des types autorisés pour les faces dépendant de la couleur de la *pointe* (le sommet extrémal haut). Cette dernière caractéristique se traduira au chapitre B par des marches tandems *bimodales*, dont l'ensemble des pas autorisés dépend de la hauteur courante de la marche.

A.1 Bijection des posets plans avec les orientations bipolaires V-transverses

On décrit dans cette section les posets plans à l'aide d'orientations bipolaires planes décorées : les orientations bipolaires V-transverses. En pratique, et comme nous le verrons à la section B.2, il est simple de spécialiser la bijection KMSW aux posets en se servant du constat fait à la Proposition 7. Toutefois nous voudrions également pouvoir compter les posets plans pas seulement selon le nombre d'arêtes, comme le permet KMSW, mais également selon le nombre de sommets. Pour ce faire, nous généralisons la bijection entre les orientations bipolaires planes et les posets plans sans N -pattern donnée par É. Fusy [Fus10]. Cette bijection fait correspondre un sommet du poset plan à une arête de l'orientation bipolaire plane et permet donc le comptage des posets plans par leur nombre de sommets à travers KMSW (section B.3, p.113).

Dans un premier temps, on définit la notion d'orientation bipolaire V-transverse et on énonce le résultat bijectif avec les posets plans comptés par sommets (A.1.1). Puis on donne une description de la bijection (A.1.2), que l'on démontre ensuite (A.1.3).

A.1.1 Définition des orientations bipolaires V-transverses et mise en bijection

Définition 26. Une orientation bipolaire V-transverse $\mathcal{B}_V$ est une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ sur laquelle on a effectué les deux opérations suivantes :

- (VB1) On subdivisé toutes les arêtes de $\mathcal{B}$ en chemins de longueur 2 en ajoutant un sommet au milieu de l'arête, appelé *sommet de subdivision*. On dit que l'on a réalisé une 2-subdivision de $\mathcal{B}$.
- (VB2) Dans toutes les faces internes f de $\mathcal{B}$ on a ajouté des arêtes orientées, dites *arêtes transversales*, et dirigées depuis un sommet de subdivision sur le bord latéral gauche de f , vers un sommet de subdivision sur son bord latéral droit ; on demande à ce que toutes les faces dans f qui résultent de cette construction soient l'une des quatre faces $\mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_t, \mathfrak{V}_l, \mathfrak{V}_r$ représentées à la figure A.1. On remarque qu'alors, nécessairement, chacun des sommets de subdivision sur un bord latéral de f porte une arête transversale. On dit que l'on a réalisé une *complétion transverse* de f (resp une *complétion transverse* de $\mathcal{B}$).

On dessine en blanc les sommets de subdivision et en rouge les arêtes transversales ; on dessine en noir les sommets et les arêtes de l'orientation bipolaire plane sous-jacente. On peut trouver sur la figure A.2 une illustration des règles (VB1) et (VB2). La terminologie V-transverse provient du fait que l'orientation bipolaire plane est décorée par des arêtes transverses et que cet objet nous sert à compter les posets plans par le nombre de sommets (*Vertex* en anglais).

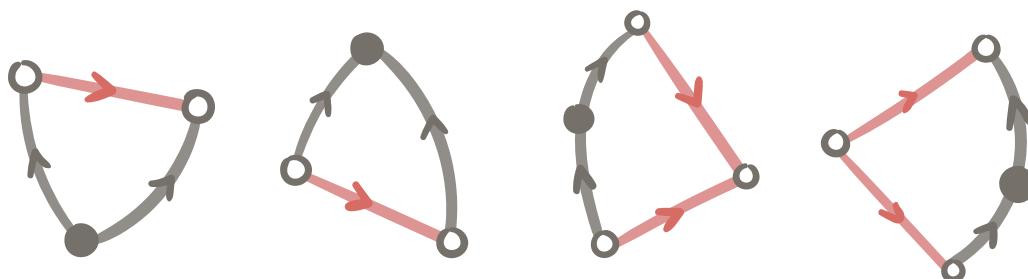


FIGURE A.1 – Les quatre faces autorisées à l'intérieur d'une orientation bipolaire V-transverse, nommées de gauche à droite : $\mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_t, \mathfrak{V}_l, \mathfrak{V}_r$, en référence à leur position dans les faces portées par les sommets noirs, *bottom, top, left* et *right*.

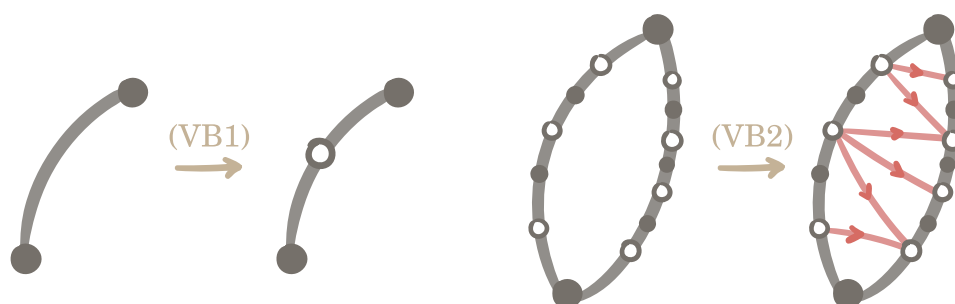


FIGURE A.2 – Illustration des règles locales (VB1) et (VB2) pour les orientations bipolaires V-transverses.

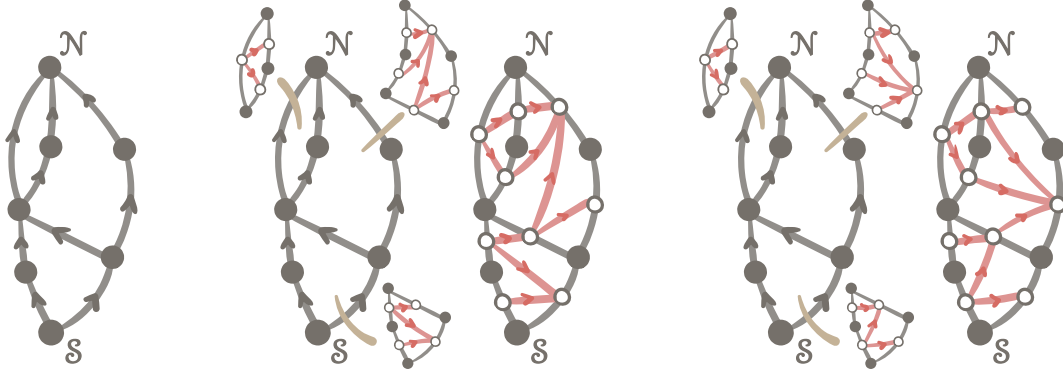


FIGURE A.3 – Deux orientations bipolaires V-transverses (au centre et à droite) supportées par la même orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ (à gauche) mais avec deux complétions transverses différentes.

On donne à la figure A.3 deux exemples d'orientations bipolaires V-transverses. On a le résultat bijectif suivant entre les orientations bipolaires V-transverses et les posets plans.

Proposition A.1. *L'ensemble des posets plans, comptés par leur nombre de sommets, est en bijection avec l'ensemble des orientations bipolaires V-transverses. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les posets plans ayant :

- $n + 2$ sommets,
- k faces internes,
- un pôle-type (p, q) ;

Les orientations bipolaires V-transverses dont l'orientation bipolaire plane sous-jacente a :

- n arêtes,
- $k + 2$ sommets,
- un type extérieur (p, q) .

On note Φ_V cette bijection. On donne une description de la bijection au paragraphe suivant, ainsi qu'une illustration à la figure A.4. On démontre ce résultat au paragraphe A.1.3.

A.1.2 Description de la bijection Φ_V

Étant donné $\mathcal{P}$ un poset plan de pôles S et N , dont les arêtes sont coloriées en rouge et les sommets en blanc, on construit l'objet intermédiaire $\mathcal{P}'$ de la manière suivante :

- a. On ajoute un sommet noir v_f dans chacune des faces internes f de $\mathcal{P}$. On ajoute également un sommet S' (resp. N') dans la face extérieure de $\mathcal{P}$, du côté de son bord latéral droit (resp. bord latéral gauche).

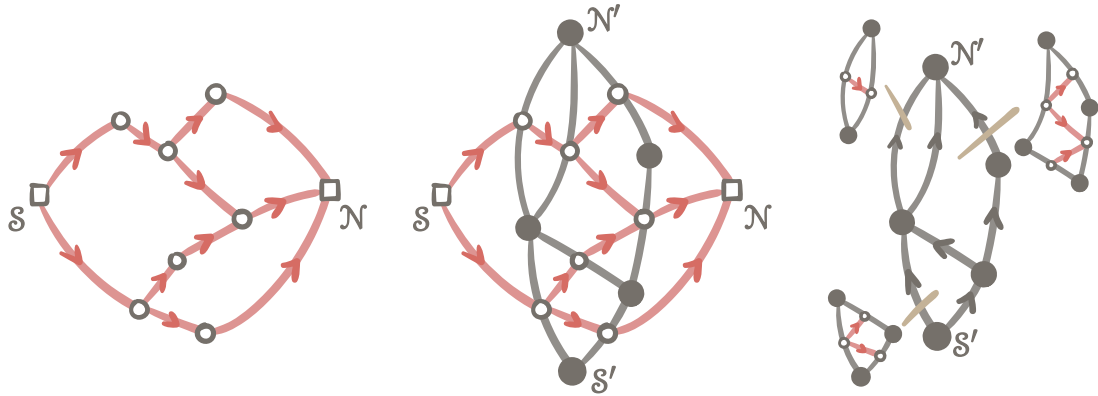
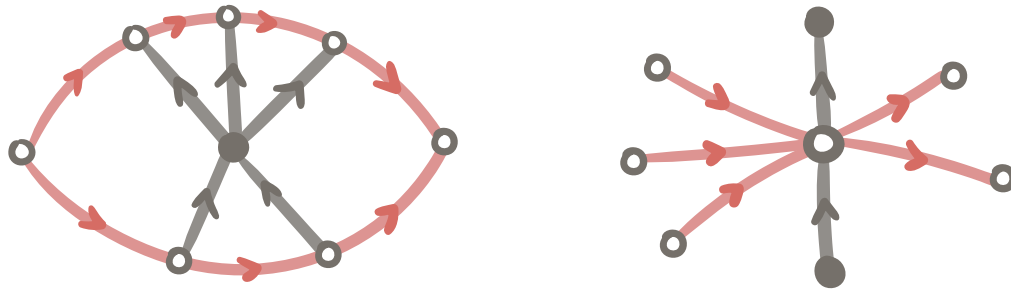


FIGURE A.4 – Une illustration de la bijection Φ_V , avec à gauche le poset plan $\mathcal{P}$, au centre l'objet intermédiaire $\mathcal{P}' = \mathcal{B}'_V$ et à droite l'orientation bipolaire V-transverse $\mathcal{B}_V$.



(a) Une face rouge, autour d'une sommet noir, dans les objets intermédiaires $\mathcal{P}' = \mathcal{B}'_V$. **(b)** Le comportement autour d'un sommet blanc, dans les objets intermédiaires $\mathcal{P}' = \mathcal{B}'_V$.

FIGURE A.5 – Le comportement local autour des sommets noirs et blancs dans les objets intermédiaires $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{B}'_V$ dans les constructions Φ_V et Φ_V^{-1} .

- b. Pour chacune des faces internes f de $\mathcal{P}$ on ajoute une arête noire dirigée depuis v_f (resp. vers v_f) et vers (resp. depuis) chacun des sommets strictement sur le bord latéral gauche (resp. sur le bord latéral droit) de f ; aussi les sommets aux coins extrémaux de f ne sont pas reliés à v_f (voir figure figure A.5a).
- c. On ajoute une arête noire dirigée depuis S' (resp. vers N') et vers (resp. depuis) tous les sommets (blancs) qui sont sur le bord latéral droit (resp. sur le bord latéral gauche) de la face extérieure de $\mathcal{P}$.

On construit alors l'image $\mathcal{B}_V$ de $\mathcal{P}$ par Φ_V en supprimant les sommets S et N à l'objet intermédiaire $\mathcal{P}'$; les sommets blancs jouent le rôle des sommets de subdivision de $\mathcal{B}_V$, les arêtes noires ses arêtes pleines et les arêtes rouges ses arêtes transversales.

Pour la construction inverse, étant donné $\mathcal{B}_V$ une orientation bipolaire plane qui est V-transverse, et dont l'orientation bipolaire plane sous-jacente est $\mathcal{B}$, de pôles S' et N' . On construit l'objet intermédiaire $\mathcal{B}'_V$ de la manière suivante :

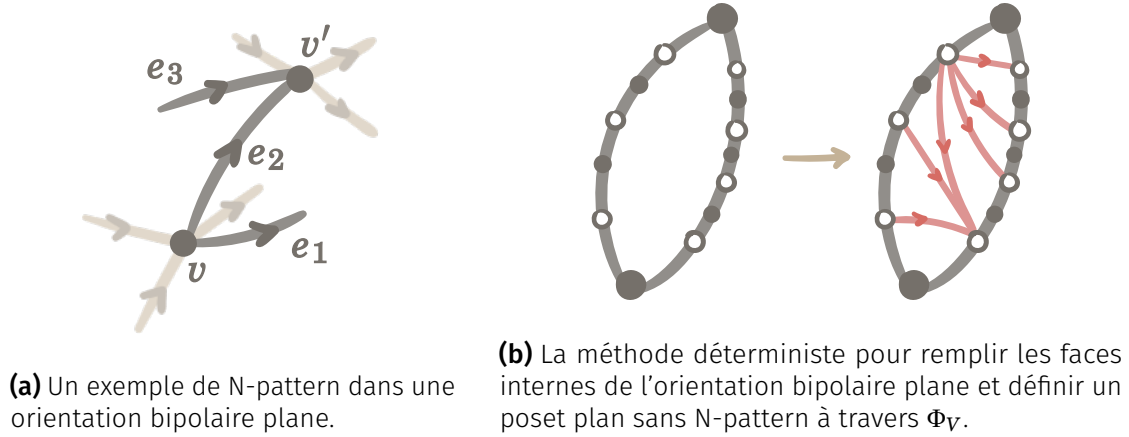


FIGURE A.6 – La bijection Φ_V généralise la bijection entre les orientations bipolaires planes et les posets plans sans N-pattern qui est donnée dans [Fus10].

- ă. On ajoute un sommet blanc $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{N}$) dans la face extérieure de $\mathcal{B}_V$, du côté de son bord latéral gauche (resp. bord latéral droit).
- ǃ. On ajoute une arête rouge dirigée depuis $\mathcal{S}$ (resp. vers $\mathcal{N}$) et vers (resp. depuis) tous les sommets qui sont strictement sur le bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) de la face extérieure de $\mathcal{B}_V$.

On construit alors l'image $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}_V$ par Φ_V^{-1} en supprimant tous les sommets noirs et arêtes noires à l'objet intermédiaire $\mathcal{B}'_V$. On pourra trouver à la figure A.4 une illustration de la bijection Φ_V que l'on vient de décrire.

Remarque 27. La bijection Φ_V , dont on vient de donner une description, généralise le résultat obtenu par É. Fusy dans [Fus10] où il met en évidence une bijection entre les orientations bipolaires planes et les posets plans sans N-pattern, c'est-à-dire ne faisant pas apparaître trois arêtes e_1, e_2, e_3 et telles que e_1 et e_2 partagent la même origine v ; que e_2 et e_3 aient la même cible v' ; et que e_1 suit e_2 (resp. e_3 suit e_2) dans l'ordre horaire autour de v (resp. de v') (voir figure A.6a). Alors le remplissage d'une face interne f de l'orientation bipolaire plane avec des arêtes transversales est déterministe : on attache le premier (resp. dernier) sommet de subdivision sur le bord latéral droit (resp. bord latéral gauche) de f à tous les sommets de subdivision qui se trouvent en face (voir figure A.6b).

A.1.3 Démonstration de la Proposition A.1

On découpe la démonstration de la Proposition A.1 en trois parties : démontrer que l'image de Φ_V est bien celle annoncée ; faire la même vérification pour Φ_V^{-1} ; et enfin démontrer que les constructions de Φ_V et Φ_V^{-1} décrites au paragraphe A.1.2 sont bien inverses l'une de l'autre.

Démonstration du sens direct. On reprend la construction de Φ_V^{-1} décrite au paragraphe A.1.2 On veut montrer que $\mathcal{B}_V$ est une orientation bipolaire V-transverse c'est-à-dire une orientation bipolaire plane sur laquelle on a effectué les opérations (VB1) et (VB2). Si v est un sommet blanc de $\mathcal{B}_V$ alors dans $\mathcal{P}$ il était latéral à exactement deux faces (par la Remarque 6) et a donc reçu à l'étape (b) exactement une arête entrante noire et une arête sortante noire, qui sont agencées comme sur la figure A.5b. Comme $\deg_{in}(v) = \deg_{out}(v) = 1$ on peut considérer que $\mathcal{B}_V$ est issu de la 2-subdivision d'une carte orientée $\mathcal{B}$. La règle (VB1) est bien vérifiée.

Montrons à présent que la carte sous-jacente $\mathcal{B}$ est bien une orientation bipolaire plane. Si v, v' sont deux sommets noirs de $\mathcal{B}$, on observe que lorsque qu'il existe un chemin orienté noir reliant v à v' dans $\mathcal{B}$, alors il existe un chemin orienté reliant v à v' dans le dual^a $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$. Aussi comme $\mathcal{P}^*$ est une orientation bipolaire plane (voir par exemple [FMR95, Proposition 5.1]) alors $\mathcal{B}$ est acyclique en tant que sous-ordre de $\mathcal{P}^*$. Par ailleurs il est clair d'après la figure A.5a et du point (c) que S' et N' sont les uniques sources de $\mathcal{B}$. On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une orientation bipolaire plane.

Reste à montrer que le point (VB2) est bien vérifié. Si f' est une face interne de $\mathcal{B}_V$. Soit elle est incluse dans la face extérieure de $\mathcal{P}$ et alors elle est de type $\mathfrak{V}_b$ (resp. $\mathfrak{V}_t$) si elle est incidente à S' (resp. N'). Soit elle est incluse dans une face intérieure f , auquel cas elle est bien de l'une des quatre formes autorisées $\mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_t, \mathfrak{V}_l, \mathfrak{V}_r$ comme le montre la figure A.5a. Donc on a bien (VB2) et le sens direct est démontré. ♦

Démonstration du sens indirect. On reprend la construction de Φ_V^{-1} décrite au paragraphe A.1.2 On veut montrer que $\mathcal{P}$ est bien un poset plan, c'est-à-dire une orientation bipolaire plane dont toutes les faces ont leurs deux bords latéraux de longueur au moins 2. Montrons déjà que $\mathcal{P}$ est acyclique. La relation d'ordre donné par les arêtes rouges de $\mathcal{B}_V$ définit un sous-ordre de l'ordre Π_E de [FMR95, Proposition 5.1] sur les arêtes noires de $\mathcal{B}_V$; aussi la relation donnée par les arêtes rouges définit bien un ordre et il n'y a pas de cycle rouge dans $\mathcal{B}_V$. On constate également que les ajouts faits aux étapes (ā) et (b) ne créent pas de nouveaux cycles puisqu'il s'agit d'ajouter une source S et un puits N . On a donc bien que $\mathcal{B}$ est acyclique.

Par ailleurs si v est un sommet blanc distinct de S ou N alors il est latéral à exactement deux faces (Remarque 6), une face f_l à gauche et une face f_r à droite de l'arête que v subdivise. Alors en vertu de (VB2) et du point (b) (lorsque v est incident à la face extérieure), on a que v reçoit toutes ses arêtes entrantes (resp. sortantes) de f_l (resp. de f_r) et en reçoit au moins une (voir figure b). Aussi S et N sont les seuls pôles de $\mathcal{B}$ qui est bien une orientation bipolaire plane.

Il nous reste à montrer que les faces de $\mathcal{B}$ ont leur bords latéraux de longueur au moins 2. Soit f une face (rouge) de $\mathcal{B}$, alors compte tenu des faces autorisées pour $\mathcal{B}_V$ par la figure A.1, on a que le sommet extrémal $\text{bottom}(f)$ (resp. $\text{top}(f)$) de f ne peut être porté que par une face $\mathfrak{V}_l$ (resp. $\mathfrak{V}_r$). Aussi il y a, dans $\mathcal{B}_V$, au moins une face $\mathfrak{V}_r$

a. Ici la notion de dual est prise au sens de [FMR95]. C'est-à-dire que l'on considère que la face extérieure de l'orientation bipolaire est en réalité découpée en deux faces extérieures, une face extérieure droite et une face extérieure gauche. Cela revient à rajouter une arête dans la face extérieure, dite *arête racine*, et orientée depuis S et vers N .

et une face $\mathfrak{U}_i$ dans f (voir figure A.5a) et il ne peut donc pas y avoir d'arête transitive. On a bien démontré que $\mathcal{P}$ est un poset plan. ♦

Démonstration que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. On a vu que les sommets noirs que la construction Φ_V^{-1} enlève sont entourés selon la figure A.5a. Aussi il y a bien un sommet noir par face rouge, sommets qui relient les coins non extrémaux de ces faces, telle que l'on les construit dans Φ_V . On vérifie également que les sommets $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ et leurs arêtes adjacentes, sont bien remis en place d'une construction à la construction inverse. On a donc bien démontré la Proposition A.1. ♦

Dans cette section on a défini les orientations bipolaires V-transverses afin de les mettre en correspondance avec les posets plans comptés par le nombre de sommets. On a ensuite donné une description puis une preuve de cette correspondance. Afin d'obtenir un résultat de comptage sur les posets plans, on veut pouvoir les ramener à des marches dans le plan, dont l'étude énumérative est plus simple. Pour cela on va utiliser la description des posets plans sous forme d'orientations bipolaires planes décorées que l'on vient de donner avec Φ_V . On proposera dans la section B.3 (p.113) du chapitre B une adaptation de la bijection KMSW aux orientations bipolaires V-transverses pour les ramener à des marches tandems dans le quart de plan.

A.2 Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les orientations bipolaires W-admissibles

Dans cette section on va mettre en bijection les bois de Schnyder triangulés avec des familles d'orientations bipolaires planes décorées, les orientations bipolaires W-admissibles, afin de pouvoir les ramener plus facilement à des marches dans le quart de plan via la bijection KMSW. La description sous la forme d'orientation bipolaire plane est plus directe que dans le cas des posets plans mais nécessite dans un premier temps de compresser l'information portée par les trois arbres couvrants à seulement deux arbres, c'est-à-dire seulement deux des trois couleurs du bois de Schnyder triangulé.

Dans un premier temps, on définit la notion d'orientation bipolaire W-admissible et on donne le résultat bijectif avec les bois de Schnyder triangulés (A.2.1). Puis on donne une description de la bijection (A.2.2), que l'on démontre ensuite (A.2.3).

A.2.1 Définition des orientations bipolaires W-admissibles et mise en bijection

Définition 28. Une orientation bipolaire W-admissible $\mathcal{B}_W$ est une orientation bipolaire plane qui vérifie les deux propriétés locales suivantes :

(WB1) La face extérieure de $\mathcal{B}_W$ est de type $(0, q)$ pour un certain $q \geq 1$.

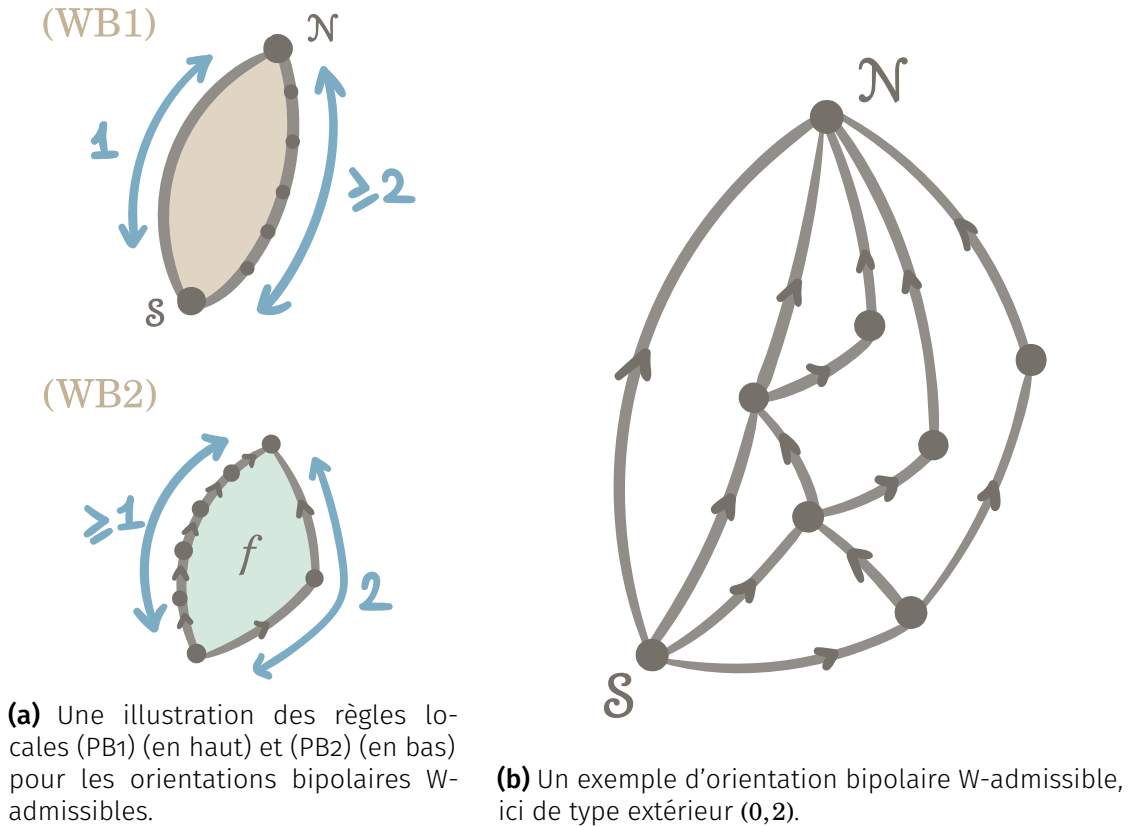


FIGURE A.7 – Orientations bipolaires W-admissibles.

(WB2) Si f est une face interne de $\mathcal{B}_W$ alors elle est de type $(i, 1)$ pour un certain $i \geq 0$.

On peut trouver sur la figure A.7a une illustration des règles (WB1) et (WB2). On donne à la figure A.7b un exemple d'orientation bipolaire W-admissible.

On a le résultat bijectif suivant entre les orientations bipolaires W-admissibles et les bois de Schnyder triangulés. Moralement il s'agit de dire qu'il est possible de retirer les arêtes vertes aux bois de Schnyder triangulés et que les arêtes orientées bleues et rouges induisent naturellement une structure d'orientation bipolaire plane.

Proposition A.2. *L'ensemble des bois de Schnyder triangulés est en bijection avec l'ensemble des orientations bipolaires W-admissibles. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les bois de Schnyder triangulés avec au moins un sommet interne et ayant :

- $\deg(V) = q + 2$,
- $2n$ arêtes rouges ou bleues,
- $n + 3$ sommets ;

Les orientations bipolaires W-admissibles ayant :

- un type extérieur $(0, q)$,
- $2n$ arêtes ,
- $n + 2$ sommets.

On note Φ_W cette bijection. On donne une description de la bijection au paragraphe suivant, ainsi qu'une illustration à la figure A.8. On démontre ce résultat au paragraphe A.2.3.

A.2.2 Description de la bijection Φ_W

Étant donné $\mathcal{W}$ un bois de Schnyder triangulé, on construit l'image $\mathcal{B}_W$ de $\mathcal{W}$ par Φ_W de la manière suivante :

- a. On supprime ses arêtes vertes et le sommet V .
- b. Le sommet B devient le pôle sud $\mathcal{S}$ de l'orientation bipolaire plane et le sommet R devient son pôle nord $\mathcal{N}$.
- c. On renverse l'orientation des arêtes bleues et on oublie la couleur des arêtes bleues et rouges. On oriente l'arête $\{\mathcal{S}, \mathcal{N}\}$ comme allant depuis $\mathcal{S}$ et vers $\mathcal{N}$.

Pour la construction inverse, étant donné $\mathcal{B}_W$ une orientation bipolaire W -admissible, on construit l'image $\mathcal{W}$ de $\mathcal{B}_W$ par Φ_W^{-1} de la manière suivante :

- ă. Si f est une face interne de $\mathcal{B}_W$, de type $(i, 1)$ (avec $i \geq 1$), alors f a un unique sommet v_r sur son bord latéral droit. On dessine des arêtes orientées vertes, dirigées vers v_r et depuis les sommets strictement sur le bord latéral gauche de f .
- ǎ. On colorie en rouge l'arête $\{v_r, \text{top}(f)\}$ et on conserve son orientation. On colorie en bleu l'arête $\{v_r, \text{bottom}(f)\}$ et on renverse son orientation.
- ċ. On renomme B (resp. R) le sommet le pôle $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{N}$). On ajoute un sommet V dans la face extérieure de $\mathcal{B}_W$ et on ajoute des arêtes $\{V, B\}$ et $\{V, R\}$. On oublie l'orientation de l'arête $\{B, R\}$.
- ď. On dessine des arêtes orientées vertes, dirigées vers V et depuis les sommets strictement sur le bord latéral gauche de $\mathcal{B}_W$.

On pourra trouver à la figure A.8 une illustration de la bijection Φ_W que l'on vient de décrire.

Remarque 29. Dans la construction de Φ_W que l'on vient de donner, on a fait le choix de renverser les arêtes bleues et de conserver l'orientation des arêtes rouges. Il aurait été possible de faire l'inverse et alors c'est le sommet R qui aurait joué le rôle du pôle sud de $\mathcal{W}$ et B le pôle nord.

Avec cette construction alternative, nous aurions mis en bijection les bois de Schnyder triangulés avec des orientations bipolaires planes dont le type extérieur est $(p, 0)$ pour un certain $p \geq 1$ et où les faces internes sont cette fois-ci de type $(1, j)$ pour un certain $j \geq 0$. On verra à la Remarque 44 les conséquences que cela aurait eu sur les pas autorisés par les marches tandems sous-jacentes.

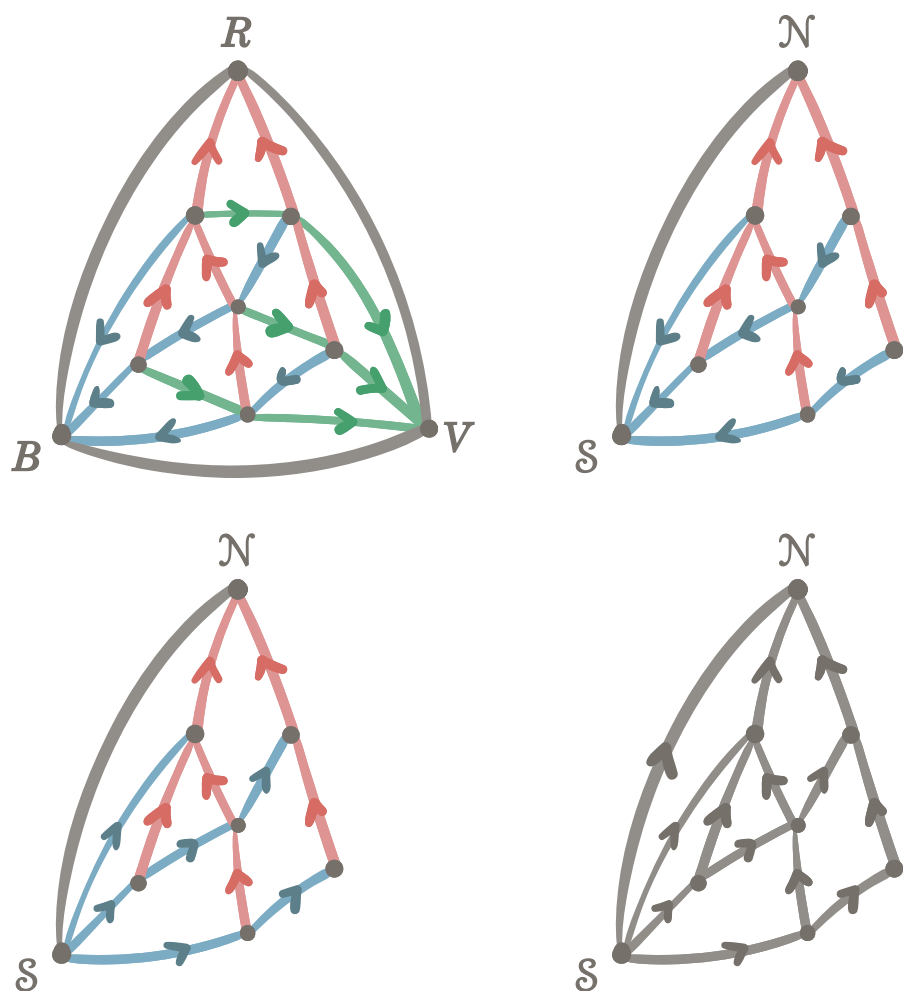


FIGURE A.8 – Illustration de la bijection Φ_W . En haut à gauche le bois de Schnyder triangulé $\mathcal{W}$, puis les étapes intermédiaires pour obtenir l'orientation bipolaire W -admissible $\mathcal{B}_W$ qui se trouve en bas à droite.

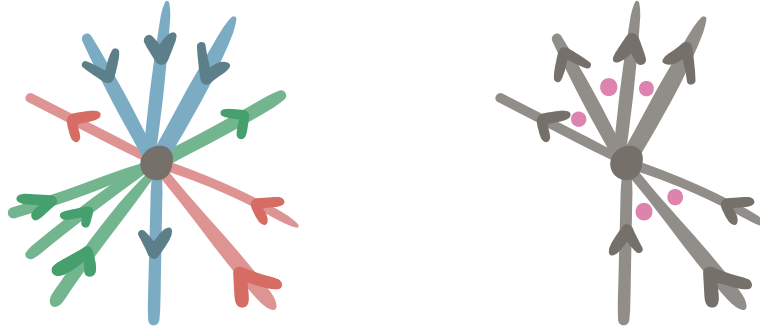


FIGURE A.9 – Traduction (à droite) de la règle locale (W2) (à gauche) des bois de Schnyder triangulés dans les orientations bipolaires W -admissibles, à la suite de la transformation (c).

A.2.3 Démonstration de la Proposition A.2

On découpe la démonstration de la Proposition A.2 en trois parties : démontrer que l'image de Φ_W est bien celle annoncée ; faire la même vérification pour Φ_W^{-1} ; et enfin démontrer que les constructions de Φ_W et Φ_W^{-1} décrites au paragraphe A.2.2 sont bien inverses l'une de l'autre.

Démonstration du sens direct. On reprend la construction de Φ_W décrite au paragraphe A.2.2. On veut montrer que la carte $\mathcal{B}_W$ que l'on a construite est bien une orientation bipolaire W -admissible, c'est-à-dire une orientation bipolaire plane qui vérifie les propriétés locales (WB1) et (WB2). Le sommet $\mathcal{S}$ était adjacent à des arêtes internes bleues dans $\mathcal{W}$ et a bien uniquement des sortantes après l'opération (c). De même on a que $\mathcal{N}$ est un puits de $\mathcal{B}_W$. Et si on prend un sommet distinct de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{B}_W$, alors il était interne dans $\mathcal{W}$ et, vérifiant (W2), il a bien des arêtes sortantes et entrantes dans $\mathcal{B}_W$ après (c) (voir figure A.9). Donc $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{N}$) est la seule source (resp. le seul puits) de $\mathcal{B}_W$.

Le caractère acyclique de $\mathcal{B}_W$ est assuré par propriété d'acyclicité donnée à la section 5.1 de [Fus07] et qui énonce qu'un bois de Schnyder triangulé, qui se voit renverser les arêtes d'une des trois couleurs, est sans cycle. Les conditions (W2) et (W1) (p. 33) donnent directement que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$ sont respectivement le seul puits et la seule source de $\mathcal{B}_W$, qui est donc bien une orientation bipolaire plane.

Montrons à présent la condition locale (WB1). De l'étape (c) on a bien que le bord latéral gauche de $\mathcal{B}_W$ est de longueur 1. De la suppression à l'étape (a) on a que la longueur du bord latéral droit de la face extérieure de $\mathcal{B}_W$ vaut $\deg(V)$. Or V est incident à au moins un sommet interne puisqu'il s'agit d'une triangulation ; d'où (WB1).

Montrons maintenant (WB2), soit f une face interne de $\mathcal{B}_W$ de type (i, j) . La

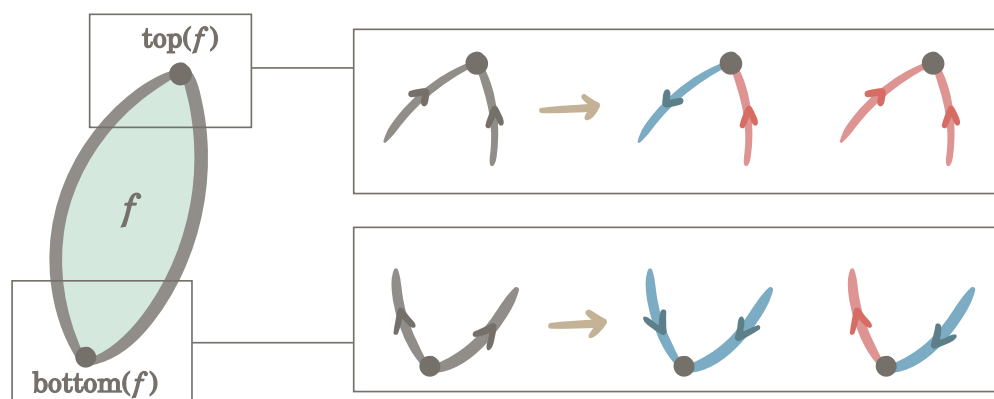


FIGURE A.10 – En haut une illustration de $\text{top}(f)$, avec à droite les deux seules configurations autorisées par (W2) dans $\mathcal{W}$. En bas une illustration de $\text{bottom}(f)$, avec à droite les deux seules configurations autorisées par (W2) dans $\mathcal{W}$.

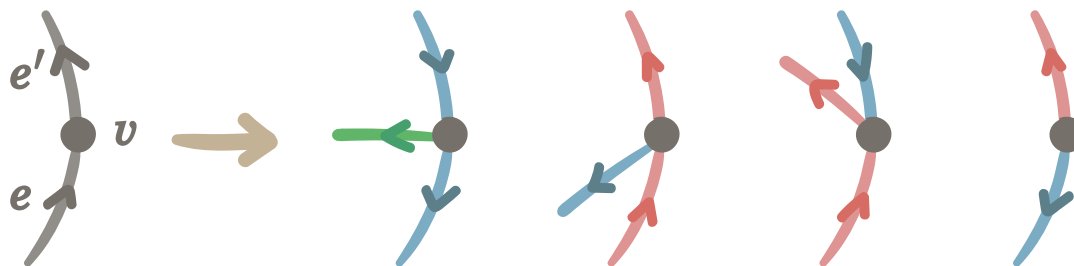


FIGURE A.11 – Les quatre configurations possibles en v ; dans trois de ces configurations, la condition (W2) impose qu'il y ait une arête sortante en v qui se trouve dans f° .

condition (W2) nous donne que toute arête verte de $\mathcal{W}$ qui est incidente à un sommet du bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) de f , est sortante (resp. entrante) en ce sommet. Aussi il n'y a pas d'arête verte dans $\mathcal{W}$ qui soit incidente à $\text{bottom}(f)$ ou $\text{top}(f)$. Les arêtes vertes dans f sont donc des cordes qui relient le bord latéral gauche de f à son bord latéral droit. La règle (W2) donne que l'arête du bord latéral droit incidente à $\text{top}(f)$ (resp. $\text{bottom}(f)$) est rouge (resp. bleue), voir figure A.10. Soit v est un sommet strictement sur le bord latéral droit de f , et soit e (resp. e') l'arête incidente à f est qui est entrante (resp. sortante) en v . Alors, dans $\mathcal{W}$, v , e et e' apparaissent selon l'une des quatre configuration données à la figure A.11. Hors, au regard de la condition (W2), et compte tenu de ce que l'on vient de dire sur les arêtes qui sont dans f° , la seule configuration possible est celle où e (resp. e') est sortante bleue (resp. entrante rouge) en v . Ce qui justifie que $j \leq 1$.

Maintenant, si $c = (v, e_1, e_2)$ est un coin de f où e_1 est entrante rouge (resp. où e_2 est entrante bleue), alors nécessairement v est un sommet extrémal de f et vaut $\text{top}(f)$

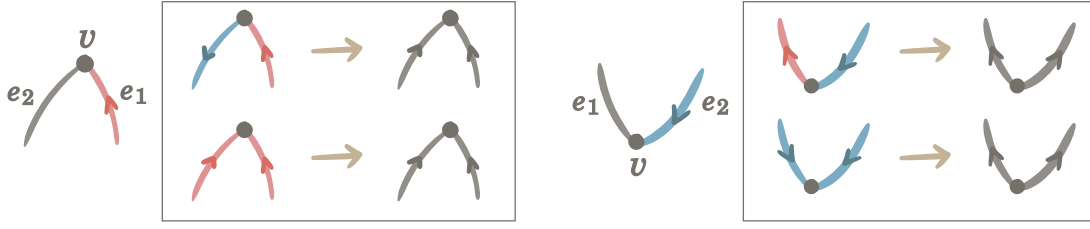


FIGURE A.12 – À gauche le cas de figure où e_1 est entrante rouge, à gauche le cas où e_2 est entrante bleue. Quelle que soit l'arête suivante autorisée par (W2), on a que v est un sommet extrémal f dans $\mathcal{B}_W$.

(resp. $\text{bottom}(f)$), voir figure A.12. Ceci justifie que $j \geq 1$ et valide (WB2). On a bien montré que $\mathcal{B}_W$ est une orientation bipolaire W -admissible. ♦

Démonstration du sens indirect. On reprend la construction de Φ_W^{-1} décrite au paragraphe A.2.2 On souhaite montrer que la carte $\mathcal{W}$ que l'on a construite est un bien un bois de Schnyder triangulé, c'est-à-dire une triangulation simple qui respecte (W1) et (W2). En premier lieu on constate que les arêtes vertes ajoutées à l'étape (ä) définissent bien une triangulation des faces internes de $\mathcal{B}_W$; en (đ) et (č) on a bien ajouté des triangles et triangulé la face extérieure. On a que $\mathcal{W}$ est une triangulation simple.

Montrons maintenant la condition (W1). Si e est une arête interne incidente à R (resp. à B) dans $\mathcal{W}$, elle était la première (resp. seconde) des deux arêtes sur le bord latéral droit d'une face f dans $\mathcal{B}_W$; elle était donc entrante en $\mathcal{N}$ (resp. sortante en $\mathcal{S}$) et par (b) elle est à présent entrante rouge (resp. bleue) en R (resp. B). On a bien (W1).

Reste à justifier (W2). Soit v un sommet interne de $\mathcal{W}$, on sait par la Remarque 6 qu'il est latéral pour exactement deux faces, disons f_ℓ et f_r . Par (WB2) on sait que v est le seul sommet strictement sur le bord latéral droit de f_r (noté v_r dans (b)). Le sommet v est aussi éventuellement un sommet top (resp. bottom) pour quelques faces; voir le dessin de gauche sur la figure A.13. L'arête $\{v, \text{top}(f_\ell)\}$ (resp. $\{v, \text{top}(f_r)\}$) devient bien sortante rouge (resp. bleue) en v à l'issue de (b). Le sommet v reçoit bien exactement une arête sortante verte de l'étape (ä) appliquée à f_r . Il reçoit aussi éventuellement des entrantes rouges (resp. bleues) des faces sur lesquelles v est au top (resp. bottom). Et il reçoit éventuellement des arêtes entrantes vertes de l'étape (ä) appliquée à f_ℓ . On constate à droite de la figure A.13 que les paquets sont bien au bon endroit et que (W2) est bien vérifié. On a montré que $\mathcal{W}$ est bien un bois de Schnyder triangulé. ♦

Démonstration que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Pour les faces internes de $\mathcal{B}_W$ on a dans le sens direct la suppression des arêtes vertes et de l'autre la triangulation de ces faces. Comme ces faces internes sont de type $(i, 1)$ il n'y a qu'une unique manière de les trianguler et on a bien remis les arêtes qui ont été

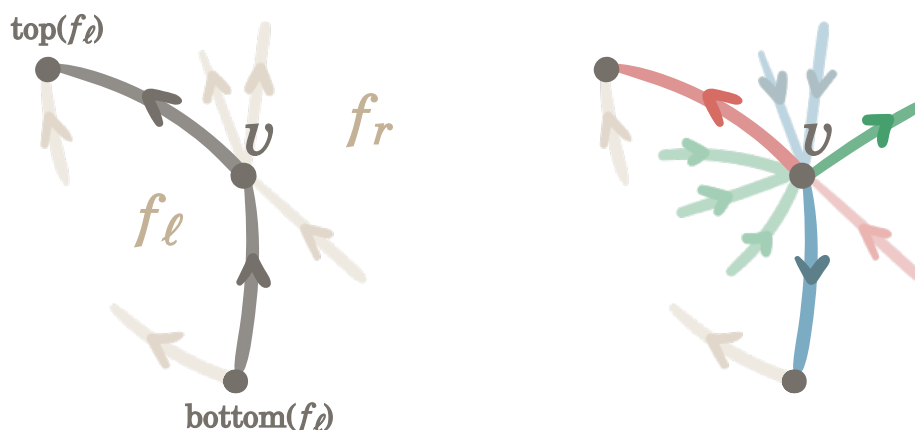


FIGURE A.13 – À gauche l’environnement local autour du sommet v dans $\mathcal{B}_W$, et à droite la traduction dans $\mathcal{W}$ après application de la construction Φ_W^{-1} .

supprimées. Enfin les faces adjacentes à V et ôtées à $\mathcal{W}$ dans (a) sont bien celles que l’on ajoute à $\mathcal{B}_W$ aux étapes (c) et (d). On a donc bien démontré la Proposition A.2. ♦

Dans cette section on a défini les orientations bipolaires W -admissibles afin de les mettre en correspondance avec les bois de Schnyder triangulés. On a ensuite donné une description puis une preuve de cette correspondance. Afin d’obtenir un résultat de comptage sur les bois de Schnyder triangulés, on veut pouvoir les ramener à des marches dans le plan, dont l’étude énumérative est plus simple. Pour cela on va utiliser la description des bois de Schnyder triangulés sous forme d’orientations bipolaires planes décorées que l’on vient de donner avec Φ_W . On proposera dans la section B.4 (p.116) du chapitre B une adaptation de la bijection KMSW aux orientations bipolaires W -admissibles pour les ramener à des marches tandems dans le quart de plan.

A.3 Bijection des structures transverses avec les orientations bipolaires T-transverses

Comme pour les posets plans et les bois de Schnyder triangulés avant cela, le but est ici de mettre en bijection les structures transverses avec une famille d’orientations bipolaires planes décorées : les orientations bipolaires T -transverses. Ici le travail nous est quelque peu mâché du fait qu’il est connu (dans le cas triangulé) [He93 ; KH97] que les sous-cartes monochromes des structures transverses induisent des orientations bipolaires planes ; on le montre ici dans le cas général à l’aide de circuits minimaux. De manière analogue aux orientations bipolaires V -transverses, l’idée derrière la description via les orientations bipolaires T -transverses consiste à décrire une partie de la structure (ici les arêtes coloriées en bleu dans la structure transverse)

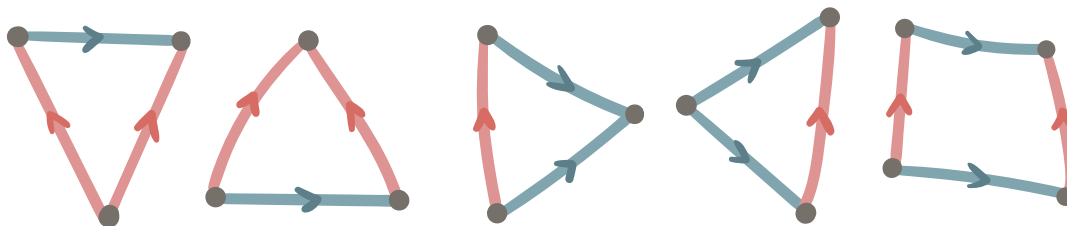


FIGURE A.14 – Les cinq faces autorisées à l'intérieur d'une orientation bipolaire T-transverse, nommées de gauche à droite : $\mathfrak{T}_b, \mathfrak{T}_t, \mathfrak{T}_l, \mathfrak{T}_r, \mathfrak{T}_q$, en référence à leur position dans les faces rouges, *bottom*, *top*, *left*, *right* et *quadrangle*.

comme des arêtes *transversales* dans les faces de l'orientation bipolaire plane qui supporte l'objet.

Dans un premier temps on définit la notion d'orientation bipolaire T-transverse et on donne le résultat bijectif avec les structures transverses (A.3.1). Puis on donne une description de la bijection (A.3.2), que l'on démontre ensuite (A.3.3).

A.3.1 Définition des orientations bipolaires T-transverses et mise en bijection

Définition 30. Une *orientation bipolaire T-transverse* $\mathcal{B}_T$ est un poset plan $\mathcal{B}$ sur lequel on a effectué l'opération suivante :

- (TB) Dans toutes les faces internes f de $\mathcal{B}$ on a ajouté des arêtes orientées dites *arêtes transversales*, dirigées depuis un sommet dans l'intérieur du chemin latéral gauche de f , vers un sommet dans l'intérieur de son chemin latéral droit ; on demande à ce que les faces dans f qui résultent de cette construction soient l'une des cinq faces $\mathfrak{T}_b, \mathfrak{T}_t, \mathfrak{T}_l, \mathfrak{T}_r, \mathfrak{T}_q$ représentées à la figure A.14. On dit que l'on a réalisé une *addition transverse* de f (resp. une *addition transverse* de $\mathcal{B}$).

On dessine en bleu les arêtes transversales et en rouge les arêtes issues du poset plan sous-jacent $\mathcal{B}$; ces dernières seront appelées ses *arêtes pleines*. Une orientation bipolaire T-transverse sera *triangulée* si aucune de ses faces intérieures n'est de la forme $\mathfrak{T}_q$.

On donne à la figure A.15 un exemple d'orientation bipolaire T-transverse et un exemple d'orientation bipolaire T-transverse triangulée. On a le résultat bijectif suivant entre les orientations bipolaires T-transverses et les structures transverses.

Proposition A.3. *L'ensemble des structures transverses est en bijection avec l'ensemble des orientations bipolaires T-transverses. Plus précisément on a une bijection*

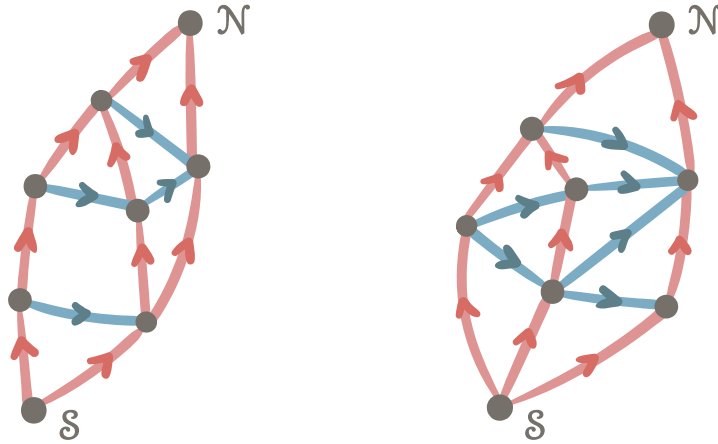


FIGURE A.15 – À gauche une orientation bipolaire T-transverse et à droite une orientation bipolaire T-transverse triangulée.

entre :

Les structures transverses ayant :

- un $\mathcal{WE}$ -type (p, q) ,
- m arêtes rouges,
- n sommets internes ;

Les orientations bipolaires T-transverses ayant :

- un type extérieur (p, q) ,
- ayant m arêtes pleines,
- $n + 2$ sommets.

Par ailleurs, chaque face quadrangulaire dans une structure transverse correspond à une face $\mathfrak{T}_q$ dans son orientation bipolaire T-transverse associée. On note Φ_T cette bijection. On donne une description de la bijection au paragraphe suivant, ainsi qu'une illustration à la figure A.16. On démontre ce résultat au paragraphe A.3.3.

A.3.2 Description de la bijection Φ_T

Étant donné $\mathcal{X}$ une structure transverse, on construit l'image $\mathcal{B}_T$ de $\mathcal{X}$ par Φ_T en supprimant les sommets $\mathcal{W}$ et $\mathcal{E}$ de $\mathcal{X}$; les arêtes rouges de $\mathcal{X}$ deviennent alors les arêtes pleines de $\mathcal{B}_T$ et les arêtes bleues deviennent ses arêtes transversales.

Pour la construction inverse, étant donné $\mathcal{B}_T$ une orientation bipolaire T-transverse, on construit l'image $\mathcal{X}$ de $\mathcal{B}_T$ par Φ_T^{-1} de la manière suivante :

- ă. On colorie toutes les arêtes pleines de $\mathcal{B}_T$ en rouge, et toutes ses arêtes transversales en bleu.
- ŷ. On ajoute deux sommets $\mathcal{W}$ et $\mathcal{E}$ dans la face extérieure de $\mathcal{B}_T$, le sommet $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{E}$) se trouvant du côté du bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) de $\mathcal{B}_T$.
- č. On ajoute des arêtes orientées bleues dirigées depuis $\mathcal{W}$ (resp. vers $\mathcal{E}$) et vers (resp. depuis) chacun des sommets strictement sur le bord latéral gauche (resp.

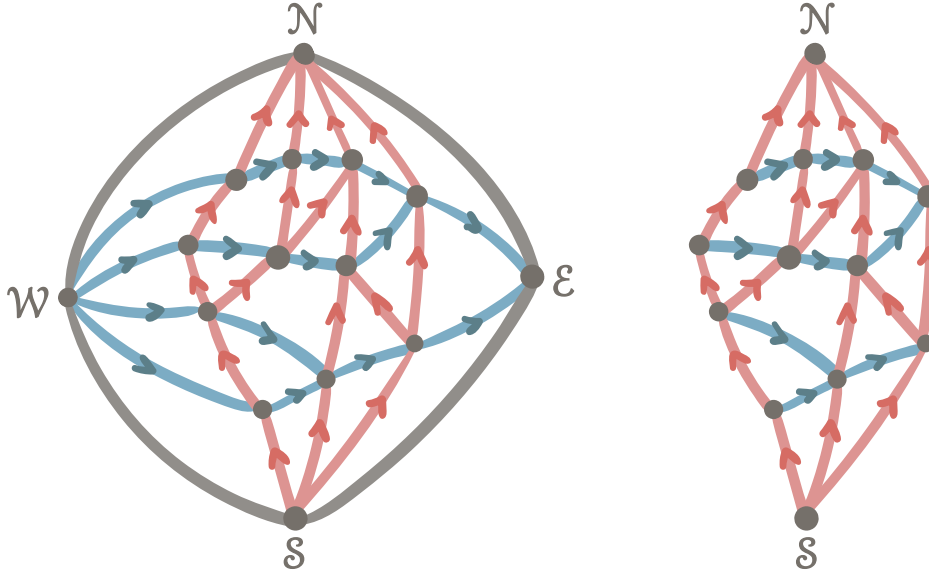


FIGURE A.16 – Illustration de la bijection Φ_T , avec à droite la structure transverse $\mathcal{X}$ et à gauche l'orientation bipolaire T-transverse $\mathcal{B}_T$.

bord latéral droit) de la face extérieure de $\mathcal{B}_T$. On ajoute également les quatre arêtes non-orientées et non-coloriées suivantes : $\{W, N\}, \{N, E\}, \{E, S\}$ et $\{S, W\}$.

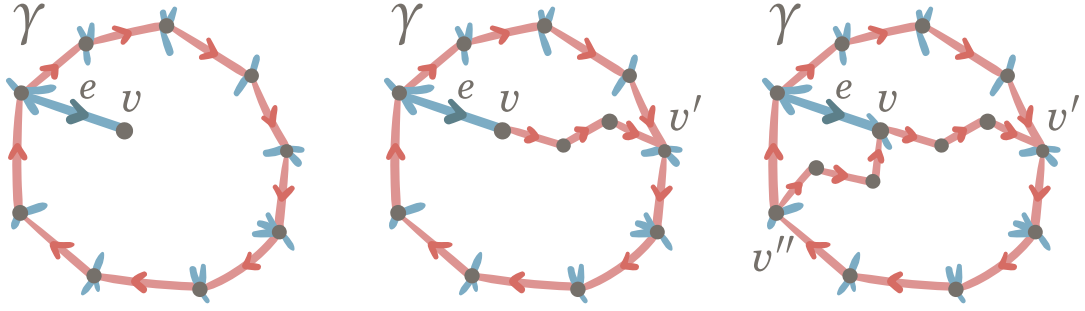
On pourra trouver à la figure A.16 une illustration de la bijection Φ_T que l'on vient de décrire.

A.3.3 Démonstration de la Proposition A.3

On découpe la démonstration de la Proposition A.3 en trois parties : démontrer que l'image de Φ_T est bien celle annoncée ; faire la même vérification pour Φ_T^{-1} ; et enfin démontrer que les constructions de Φ_T et Φ_T^{-1} décrites au paragraphe A.3.2 sont bien inverses l'une de l'autre.

Démonstration du sens direct. On reprend la construction de Φ_T décrite au paragraphe précédent. On veut montrer que $\mathcal{B}_T$ est bien une orientation bipolaire T-transverse, c'est-à-dire un poset plan muni d'une addition transverse vérifiant (TB). Soit $\mathcal{B}$ la carte plane obtenue à partir de $\mathcal{B}_T$ en ne gardant que ses arêtes rouges ; on souhaite montrer que $\mathcal{B}$ est un poset plan. La condition (T2) implique que tous les sommets internes dans $\mathcal{X}$, et donc différents de S et N dans $\mathcal{B}_T$, ont au moins une entrante rouge et une sortante rouge. Aussi compte tenu des conditions aux bord données par (T1), on a bien que S (resp. N) est la seule source (resp. le seul puits) de $\mathcal{B}$.

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ est acyclique. Par l'absurde, soit γ un cycle minimal de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire dont l'intérieur γ° ne contient aucun cycle orienté. La condition



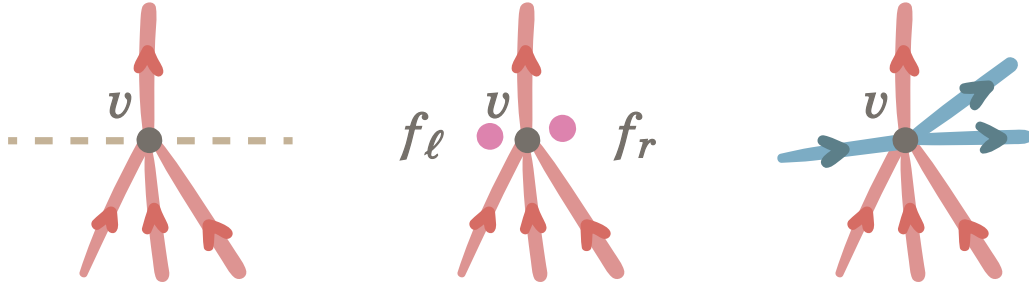
(a) L'arête e est reliée à un sommet qui se trouve dans γ° . (b) On a un chemin orienté de v vers un sommet v' de γ . (c) On a un chemin orienté d'un sommet v'' de γ vers v .

FIGURE A.17 – On montre que le cycle γ n'est en fait pas minimal, ce qui démontre que $\mathcal{B}$ est bien acyclique.

locale (T2) implique qu'il y ait, dans $\mathcal{X}$, nécessairement une arête bleue e dans γ° , incidente à un sommet de γ (voir figure A.17a). Si γ est un cycle horaire (resp. anti-horaire) alors toutes les arêtes bleues incidentes à γ sont sortantes (resp. entrantes) en les sommets de γ ; aussi e ne peut pas définir une corde de γ , et on note v la cible (resp. l'origine) de e . Comme $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ sont les seuls sources et puits de $\mathcal{B}$ et sont en dehors de γ° , on peut construire un chemin d'arêtes sortantes qui démarre en v et qui ne peut pas boucler (par minimalité de γ) et qui rejoint donc un sommet v' sur γ (voir figure A.17b). De même on construit un chemin d'arêtes entrantes qui part de v et qui doit rejoindre un sommet $v'' \neq v'$ sur γ . Or ces deux chemins en plus de la partie de γ qui relie v' à v'' forment un cycle orienté contenu dans γ° , ce qui contredit la minimalité de γ (voir figure A.17c). On a donc montré que $\mathcal{B}$ est acyclique et donc que $\mathcal{B}$ est une orientation bipolaire plane.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est un poset plan. La condition (T2) implique que les arêtes rouges rencontrent tous les sommets de $\mathcal{X}$ et forment donc une sous-carte connexe couvrante de $\mathcal{X}$, il n'y a donc pas de sommet de $\mathcal{X}$ à l'intérieur des faces de $\mathcal{B}$. Soit f une face de $\mathcal{B}$, on veut montrer que ses bords latéraux sont de longueur au moins 2. Supposons par l'absurde que f soit de type $(0, q)$ (resp. de type $(p, 0)$) pour un certain $p, q \geq 0$ et soit δ son bord latéral droit (resp. bord latéral gauche). Comme $\mathcal{X}$ est une carte simple, alors il y a au moins un sommet v qui est strictement dans δ . Or par (T2) il y a nécessairement une arête entrante en v (resp. sortante en v) qui se trouve dans f° . On a donc une contradiction et $\mathcal{B}$ est donc bien un poset plan.

Reste à montrer que $\mathcal{B}_T$ est obtenu à partir de $\mathcal{B}$ par la construction (TB). Comme les faces rouges de $\mathcal{B}_T$ n'ont pas de sommet interne alors les arêtes transversales sont des cordes de ces faces. D'après (T2) on a que ces cordes sont nécessairement des arêtes orientées depuis les sommets qui sont strictement sur le bord latéral gauche et vers les sommets qui sont strictement sur le bord latéral droit des faces en question. Tous les sommets internes ont donc des arêtes transversales incidentes et les faces



(a) Les arêtes autour de v forment deux paquets. (b) On a f_ℓ et f_r de part et d'autre de v . (c) Autour de v on respecte la condition (T2) dans T_{gen} .

FIGURE A.18 – On reconstruit l'environnement du sommet v dans $\mathcal{B}_T$ pour montrer qu'il vérifie bel et bien (T2) dans $\mathcal{X}$ au travers de Φ_T^{-1} .

internes sont bien de degré 3 ou 4 et sont effectivement l'une des cinq faces de la figure A.14. On a bien montré que $\mathcal{B}_T$ est une orientation bipolaire T-transverse.

Par ailleurs dans $\mathcal{X}$ la condition (T1) implique que les faces adjacentes aux sommets extérieurs $\mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{E}$, et $\mathcal{S}$ sont nécessairement de degré 3. Aussi si $\mathcal{X}$ est de $\mathcal{WE}$ -type (p, q) on se retrouve bien avec un type extérieur (p, q) pour $\mathcal{B}$. La correspondance pour le nombre de sommets et d'arêtes est claire. ♦

Démonstration du sens indirect. On reprend la construction de Φ_T^{-1} décrite au paragraphe A.3.2 On souhaite montrer que $\mathcal{X}$ est bien une structure transverse, c'est-à-dire une carte plane simple dont la face extérieure est de degré 4 et qui vérifie les conditions locales (T1) et (T2). Compte tenu des ajouts des sommets $\mathcal{W}$ et $\mathcal{E}$ au point (b) et des arêtes sur ces sommets au point (c) on a bien que la face extérieure est de degré 4. Et la condition (T1) découle directement de (c).

Reste à monter (T2). Soit v un sommet interne de $\mathcal{X}$, alors la condition (B) sur les orientations bipolaires planes implique que ses arêtes rouges (les arêtes pleines de $\mathcal{B}_T$) sont partitionnées en deux paquets non vides et d'arêtes consécutives autour de v : ses arêtes entrantes rouges et ses arêtes sortantes rouges (voir figure A.18a). Il s'agit maintenant de montrer que les arêtes bleues forment elles aussi deux paquets et qui s'insèrent au bon endroit autour de v . Par le Lemme A.5 on a que v est strictement sur le bord latéral d'exactly deux faces : une face f_r à sa droite et une face f_ℓ à sa gauche (voir figure A.18b). Enfin compte tenu des faces autorisées pour les orientations bipolaires T-transverses et données à la figure A.14, on a que v admet au moins une arête entrante (resp. sortante) transversales bleues et qui se trouve nécessairement dans f_ℓ (resp. f_r). Ce qui nous donne donc (T2). On a bien montré que $\mathcal{X}$ est une structure transverse. ♦

Démonstration que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Les sommets $\mathcal{W}$ et $\mathcal{E}$ et leurs arêtes adjacentes, qui sont enlevées dans la construction de Φ_T

sont bien celles qu'on remet lors de la construction réciproque. Le reste de la vérification est claire et les applications Φ_T et Φ_T^{-1} sont bien inverses l'une de l'autre. On a donc bien démontré la Proposition A.3. ♦

Dans cette section on a défini les orientations bipolaires T-transverses afin de les mettre en correspondance avec les structures transverses. On a ensuite donné une description puis une preuve de cette correspondance. Afin d'obtenir un résultat de comptage sur les structures transverses, on veut pouvoir les ramener à des marches dans le plan, dont l'étude énumérative est plus simple. Pour cela on va utiliser la description des structures transverses sous forme d'orientations bipolaires planes décorées que l'on vient de donner avec Φ_T . On proposera dans la section B.5 (p.119) du chapitre B une adaptation de la bijection KMSW aux orientations bipolaires T-transverses pour les ramener à des marches tandems dans le quart de plan.

A.4 Bijection des orientations polyédrales avec les orientations bipolaires P-admissibles

Dans cette section on cherche à décrire les orientations polyédrales à l'aide d'une sous-famille d'orientations bipolaires planes : les orientations bipolaires P-admissibles. On montre en fait qu'il est possible de retirer toutes les arêtes bleues et rouges (ou tous les sommets verts, de manière équivalente) aux orientations polyédrales et qu'il est alors encore possible de reconstruire l'orientation polyédrale initiale. L'objet qui résulte de ces suppressions a alors une structure d'orientation bipolaire plane qui se trouve être bipartie.

La famille des orientations bipolaires P-admissibles (et les orientations bipolaires S-transverses que l'on définira à la section A.5) a aussi de particulier que les faces autorisées varient selon que sommet extrémal haut ($\text{top}(f)$) soit de couleur blanche ou noire. Aussi on distingue ces deux types de faces (dites faces à pointe blanche et faces à pointe noire) et cela engendrera des particularités sur les définitions des marches tandems associées. On aura aussi des résultats plus faibles sur le comportement asymptotique de ces familles à cause de ce caractère bimodal.

Dans un premier temps, on définit la notion d'orientation bipolaire P-admissible et on donne le résultat bijectif avec les orientations polyédrales (A.4.1). Puis on donne une description de la bijection (A.4.2), que l'on démontre ensuite (A.4.3).

A.4.1 Définition des orientations bipolaires P-admissibles et mise en bijection

On rappelle les conventions de représentation d'une orientation bipolaire plane bipartie $\mathcal{B}$ telles qu'énoncées à la sous-section III.1 : on prend l'unique 2-coloriage des sommets de $\mathcal{B}$ tel que le pôle nord $\mathcal{N}$ soit blanc. On définit à présent la famille d'orientations bipolaires planes auxquelles on va ramener les orientations polyédrales.

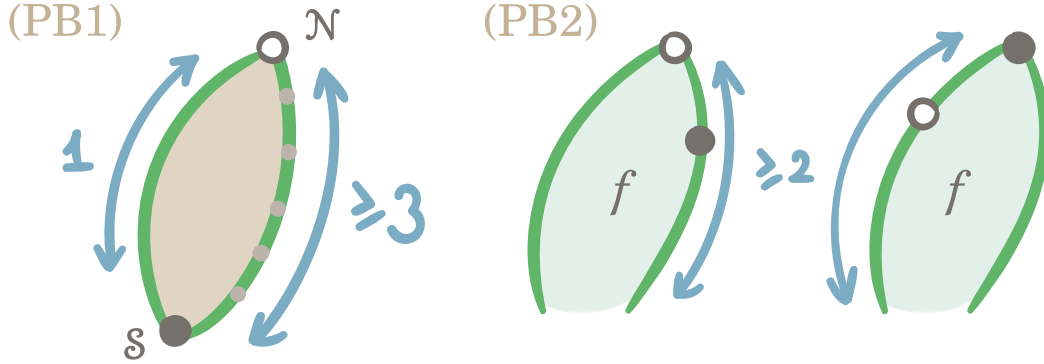


FIGURE A.19 – Une illustration des règles (PB1) et (PB2) pour les orientations bipolaires P-admissibles.

Définition 31. Si $\mathcal{B}$ est une orientation bipolaire plane bipartie et f une face de $\mathcal{B}$, on dit que f est une *face à pointe noire* lorsque le sommet $\text{top}(f)$ est noir ; on dit que f est une *face à pointe blanche* lorsque le sommet $\text{top}(f)$ est blanc.

Définition 32. Une *orientation bipolaire P-admissible* est une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}_P$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- (PB1) $\mathcal{B}_P$ a un type extérieur $(0, k)$ pour un certain $k \geq 2$.
- (PB2) Toute face à pointe blanche a un type (i, j) avec $j \geq 1$; toute face à pointe noire a un type (i, j) avec $i \geq 1$

On peut trouver sur la figure A.19 une illustration des règles (PB1) et (PB2).

On donne à la figure A.20 un exemple d'orientation bipolaire P-admissible. Pour des raisons pratiques on choisit de dessiner en vert les arêtes des orientations bipolaires P-admissibles. On a le résultat bijectif suivant entre les orientations bipolaires P-admissibles et les orientations polyédrales.

Proposition A.4. *Les orientations polyédrales sont en bijection avec les orientations bipolaires P-admissibles. Plus précisément on a une bijection entre :*

<i>Les orientations polyédrales ayant :</i>	<i>Les orientations bipolaires P-admissibles ayant :</i>
• n sommets internes, parmi lesquels	• $n + 1$ arêtes,
• a sommets rouges,	• $a + 1$ sommets blancs,
• b sommets bleus,	• $b + 1$ sommets noirs,
• et c sommets verts ;	• et c faces internes.

On note Φ_P cette bijection. On donne une description de la bijection au paragraphe suivant, ainsi qu'une illustration à la figure A.22. On démontre ce résultat au paragraphe A.4.3.

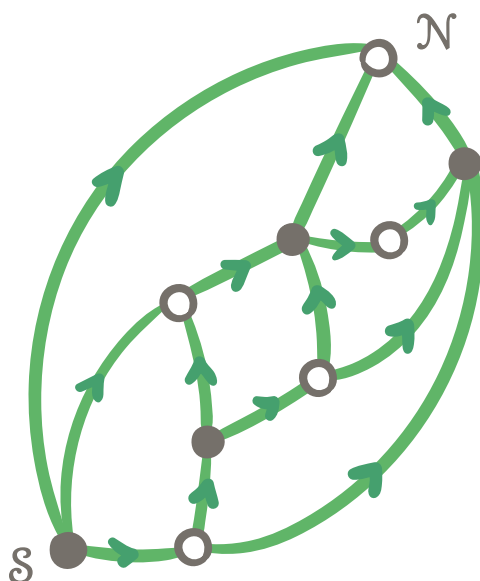


FIGURE A.20 – Un exemple d'orientation bipolaire P-admissible.

A.4.2 Description de la bijection Φ_P

Si on devait le dire simplement, il s'agit là de voir que toute l'information donnée par une orientation polyédrale est en fait contenue dans la carte induite par ses arêtes vertes (ou n'importe quelle autre couleur, par symétrie).

Étant donné $\mathcal{O}$ une orientation polyédrale, on construit l'image $\mathcal{B}_P$ de $\mathcal{O}$ par Φ_P en supprimant tous les sommets verts de $\mathcal{O}$ et leurs arêtes incidentes ; et en recoloriant ses sommets bleus en sommets noirs, ainsi que ses sommets rouges en sommets blancs.

Pour la construction inverse, étant donné $\mathcal{B}_P$ une orientation bipolaire P-admissible, on construit l'image $\mathcal{O}$ de $\mathcal{B}_P$ par Φ_P^{-1} de la manière suivante :

- ă. On ajoute un sommet v_f pour toutes les faces f de $\mathcal{B}_P$, y compris sa face extérieure ; on relie v_f à tous les coins de f . On orientera ces arêtes par la suite en (č) et (ď).
- ǃ. On recolorie en bleu tous les sommets noirs, en rouge tous les sommets blancs et en vert tous les sommets v_f issus d'une face. On pourra montrer qu'à cette étape l'objet intermédiaire $\mathcal{B}'_S$ est bien une triangulation eulérienne, aussi il est possible de la représenter en respectant les conventions de la Définition 11.
- č. Soit t_{ext} le sommet (vert) issu de la face extérieure de $\mathcal{B}_P$. On oriente les arêtes incidentes à t_{ext} comme allant vers les sommets bleus et depuis les sommets rouges.

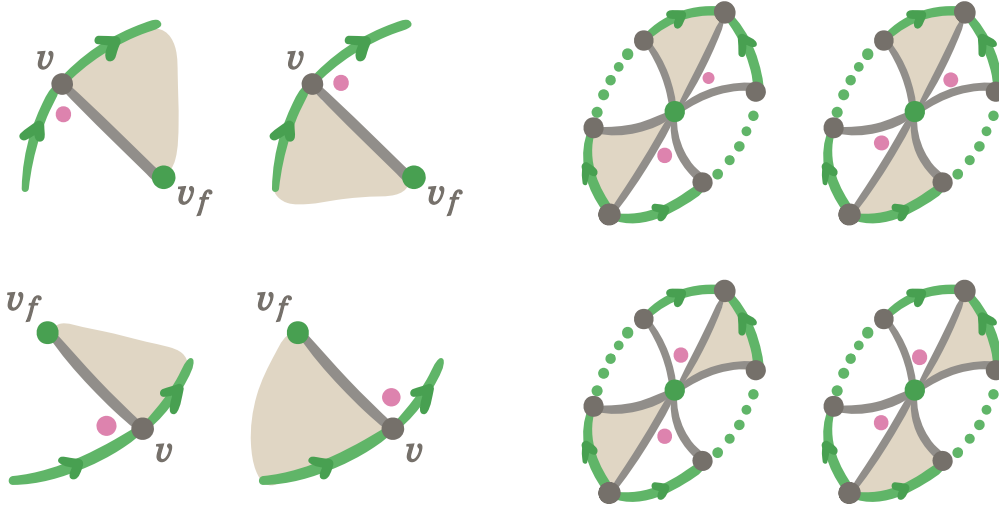


FIGURE A.21 – On pose des marqueurs là où se trouvaient les coins latéraux des faces internes de $\mathcal{B}_P$ (à gauche). On pose également deux marqueurs autour des sommets v_f (à droite). À chaque fois on détaille tous les cas de figure possibles; les sommets et arêtes gris sont en réalité soit bleus soit rouges.

- đ. Si f est une face de $\mathcal{B}_P$, et v un sommet latéral de f dans $\mathcal{B}_P$, on pose un marqueur dans le coin en v qui se trouve dans un triangle blanc dans f . On pose également un marqueur dans les deux coins de v_f dans des triangles blancs adjacents à $\text{top}(f)$ et $\text{bottom}(f)$ (voir figure A.21).
- ẽ. On montrera plus loin qu'il y a une unique manière d'orienter les arêtes à l'intérieur de chaque face interne f de $\mathcal{B}_P$ en respectant les marqueurs comme des marqueurs de coin extrême dans $\mathcal{O}$.

On pourra trouver à la figure A.22 une illustration de la bijection Φ_P que l'on vient de décrire. On détaille la construction de Φ_P^{-1} à la figure A.23.

A.4.3 Démonstration de la Proposition A.4

Avant de démontrer la Proposition A.4, on démontre un premier lemme qui donne la répartition des coins extrémaux par un argument de comptage.

Lemme A.5. Soit $\mathcal{O}$ une orientation polyédrale, alors toutes les faces claires internes de $\mathcal{O}$ contiennent exactement deux coins extrémaux.

Démonstration. Un triangle d'une carte orientée contient soit zéro coins extrémaux (auquel cas il est le support d'un cycle orienté de longueur 3) soit deux. Soient $\#s, \#f, \#a$ respectivement le nombre de sommets, faces et arêtes de $\mathcal{O}$; soient $\#s^i$ et $\#f_c^i$ respectivement le nombre sommets intérieurs et le nombre de faces claires intérieures. Comme $\mathcal{O}$ est une triangulation on a, en sommant sur les faces, que $3\#f = 2\#a$. Donc

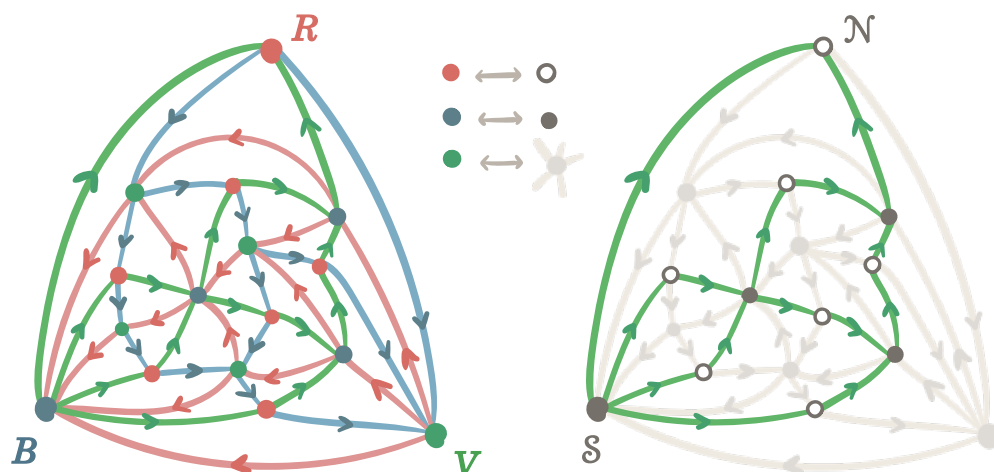


FIGURE A.22 – Une illustration de la bijection Φ_P entre l'orientation polyédrale $\mathcal{O}$ (à gauche) et l'orientation bipolaire P-admissible $\mathcal{B}_P$ (à droite). On a mis au centre le dictionnaire pour colorier les sommets. On détaille la construction réciproque Φ_P^{-1} à la figure A.23.

par la relation d'Euler (Théorème 1) cela donne $2\#s = \#f + 4$. Comme exactement la moitié des faces sont claires, cela revient à dire que $2\#s^i = 2\#f_c^i$. Enfin, comme chaque sommet interne porte exactement deux coins extrémaux, on a que le nombre de faces claires internes est égal à deux fois le nombre de coins extrémaux. Alors chaque face claire interne porte exactement deux coins extrémaux. Pour rappel, la face (claire) externe ne porte aucun coin extrémal. ♦

À présent on donne la démonstration de Proposition A.4 que l'on découpe en trois parties : démontrer que les images par Φ_P (resp. par Φ_P^{-1}) sont bien des orientations bipolaires P-admissibles (resp. des orientations polyédrales) ; et démontrer que les constructions de Φ_P et Φ_P^{-1} décrites au paragraphe A.4.2 sont bien inverses l'une de l'autre.

Démonstration du sens direct. On reprend la construction de Φ_P décrite au paragraphe A.4.2 Il s'agit de montrer que $\mathcal{B}_P$ est bien une orientation bipolaire P-admissible, à savoir une orientation bipolaire plane bipartie qui respecte (PB1) et (PB2). Epstein et Mumford ont d'ores et déjà démontré [EM14, Lemme 18] que $\mathcal{B}_P$ est une orientation bipolaire plane et que le sommet B (resp. le sommet R) est l'unique source (resp. l'unique puits) de $\mathcal{B}_P$. Une face de $\mathcal{B}_P$ correspond à une face verte f de $\mathcal{O}^b$, et l'intérieur f° de f ne contient qu'un unique sommet vert v_f avec $\deg(f)$ faces autour de lui. Comme la carte $\mathcal{O}$ est eulérienne, il y a une alternance de faces claires et sombres autour de v_f et donc un nombre pair de faces ; $\deg(f)$ est pair et $\mathcal{B}_P$ est alors

b. C'est-à-dire une face de la carte induite par les arêtes vertes de $\mathcal{O}$.

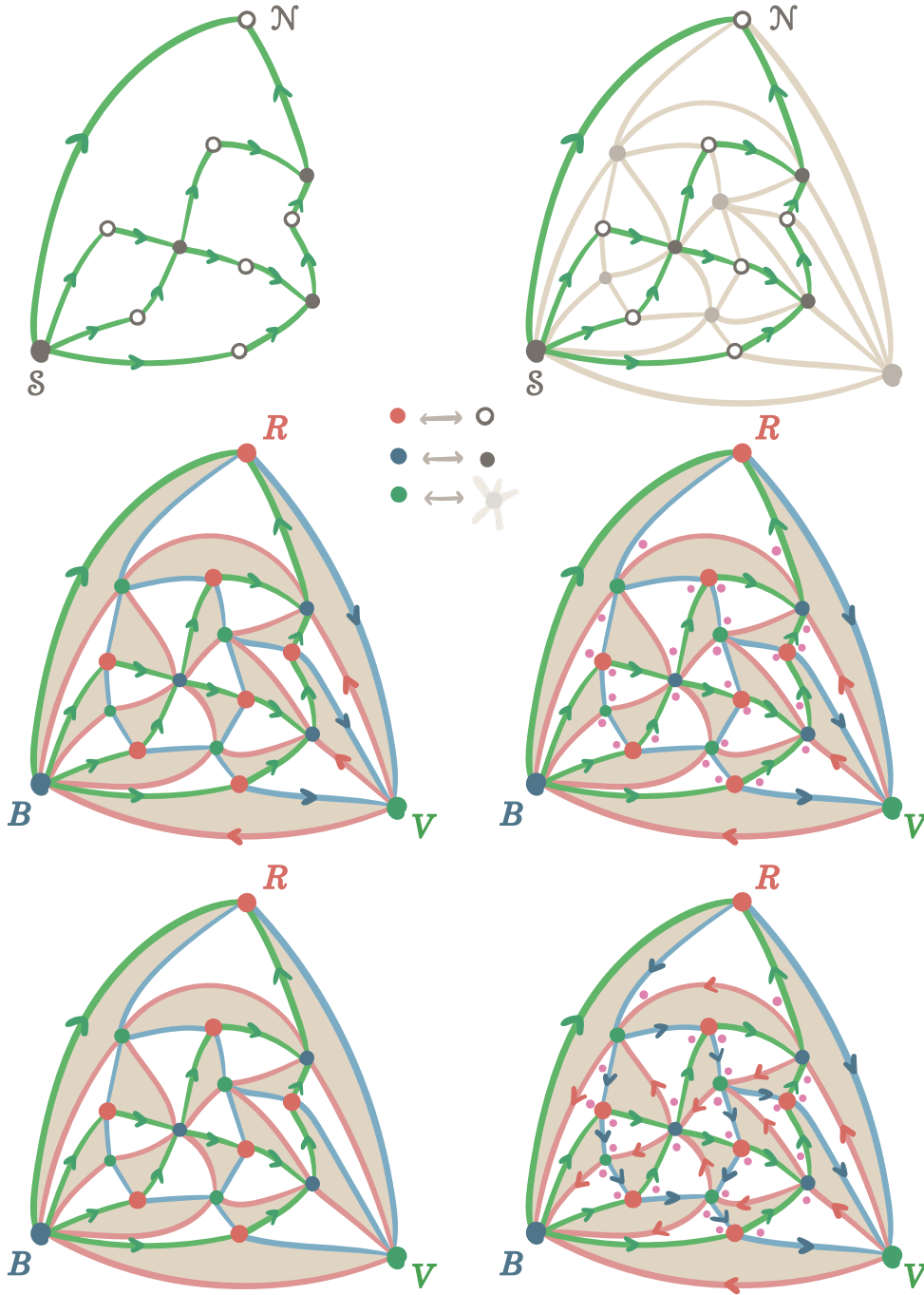


FIGURE A.23 – Le détail de la construction Φ_P^{-1} . En haut à gauche l'orientation bipolaire P-admissible $\mathcal{B}_P$, puis successivement les constructions après les étapes (a), (b), (c), (d), et (e) qui correspond à l'orientation polyédrale $\mathcal{O}$.

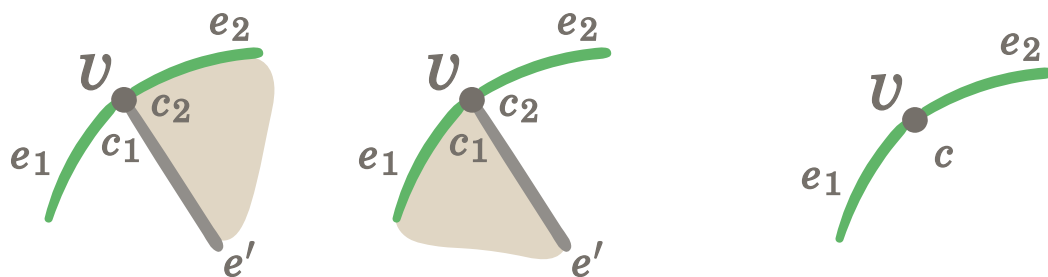


FIGURE A.24 – Un coin $c = (v, e_1, e_2)$ dans $\mathcal{O}$ (à droite), et deux cas de figure possibles dans $\mathcal{B}_P$: celui où le coin c_1 est le coin attaché à c (à gauche) et celui où il s'agit du coin c_2 (au centre). Le sommet v et l'arête e' sont coloriées en rouge ou en bleu, sans conséquence pour la démonstration.

bien bipartie. Par ailleurs $\mathcal{B}_P$ est de type extérieur $(0, d - 2)$ où $d \geq 4$ est le degré du sommet extérieur G , on a donc bien la propriété locale (PB1).

Reste à montrer la condition (PB2) ; avant cela on introduit la notion de sommet attaché qui nous servira pour le reste de la démonstration. En premier lieu on remarque que si $c = (v, e_1, e_2)$ est un coin dans $\mathcal{B}_P$, alors il correspond à exactement deux coins dans $\mathcal{O}$: $c_1 = (v, e_1, e')$ et $c_2 = (v, e', e_2)$ (voir figure A.24). Comme $\mathcal{O}$ est eulérienne, un seul de ces deux coins c_1, c_2 est dans une face blanche, on nomme ce coin le *coin attaché* à c . Par ailleurs, comme un coin dans une face sombre est nécessairement latéral, alors on a la propriété suivante : (ATT.) un coin de $\mathcal{B}_P$ est extrémal si et seulement si son coin attaché dans $\mathcal{O}$ est latéral.

On montre à présent la propriété (PB2). Soient f une face interne de $\mathcal{B}_P$ de type (i, j) et v_f le sommet interne vert de $\mathcal{O}$ correspondant à f . Soit t_{up} (resp. t_{down}) le triangle blanc dans f qui est adjacent au sommet $\text{top}(f)$ (resp. au sommet $\text{bottom}(f)$). D'après la remarque (ATT.) faite au paragraphe précédent, les coins de $\text{top}(f)$ et de $\text{bottom}(f)$ dans t_{up} et t_{down} sont latéraux dans $\mathcal{O}$ (car attachés à des coins extrémaux dans $\mathcal{B}_P$). Or le Lemme A.5 assure que les triangles internes blancs ont exactement deux coins extrémaux ; donc nécessairement les coins de t_{up} et t_{down} incidents à v_f sont des coins extrémaux. Il s'agit là des deux coins extrémaux de v_f imposés par la règle (P2), ce qui assure que t_{up} et t_{down} sont deux triangles distincts. Le fait que ces deux triangles soient distincts assure que le bord latéral gauche de f a au moins une arête d'un sommet noir vers un sommet blanc. Pour la même raison, le bord latéral droit de f a au moins une arête d'un sommet blanc vers un sommet noir. On montre en figure A.25 les quatre cas possibles selon que $\text{top}(f)$ ou $\text{bottom}(f)$ soient blancs ou noirs. Si f est une face à pointe noire alors on a bien que $i \geq 1$ et que si f est une face à pointe blanche alors on a bien que $j \geq 1$. On a bien montré la condition (PB2) et $\mathcal{B}_P$ est donc bien une orientation bipolaire P-admissible. ♦

Démonstration du sens indirect. On reprend la construction de Φ_P^{-1} décrite au pa-

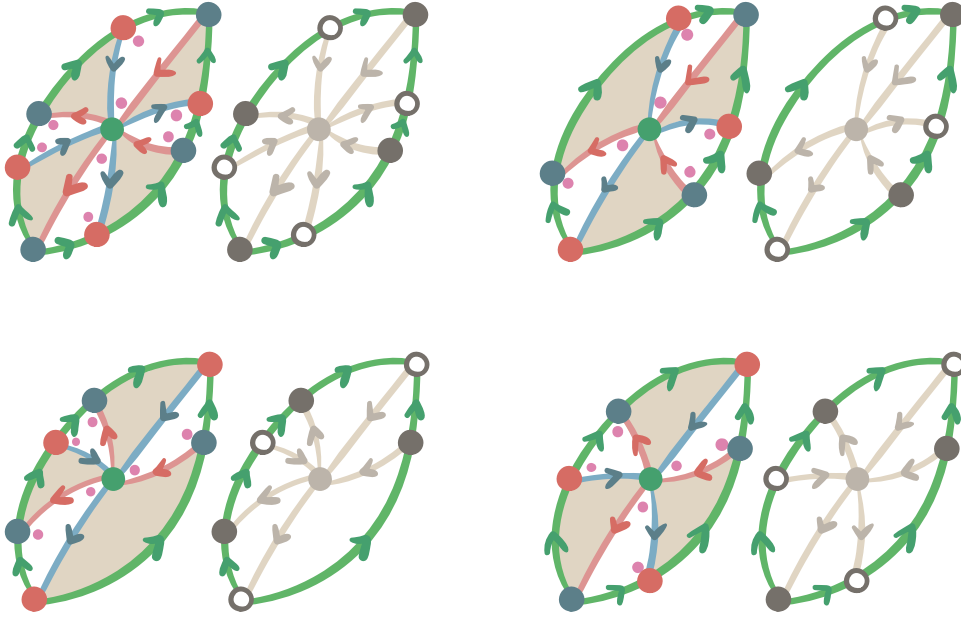


FIGURE A.25 – Les quatre cas possibles selon que $\text{top}(f)$ ou $\text{bottom}(f)$ soient blancs ou noirs, et la traduction de ces contraintes dans $\mathcal{O}$.

ragraphe A.4.2. On souhaite montrer qu'à l'étape (b) la carte intermédiaire $\mathcal{B}'_S$ est bien eulérienne. La carte $\mathcal{B}_S$ était bipartite et donc 2-coloriable et on y a ajouté des sommets verts v_f à l'intérieur de chacune de ses faces f ; les sommets v_f étant reliés aux sommets bleus et rouges incidents à la face f . On constate que le coloriage des sommets de $\mathcal{B}'_S$ en rouge, vert, bleu réalisé en (b) définit bien un 3-coloriage, et la carte est une triangulation eulérienne (par Proposition 10).

On veut également montrer qu'à l'étape (e) il y a une unique manière d'orienter les arêtes de $\mathcal{O}$ à l'intérieur d'une faces internes f de $\mathcal{B}_P$ en respectant les marqueurs posés en (d). On procède de la manière suivante et qui est illustrée en figure A.26. On commence par orienter l'arête en haut de la face comme étant dirigée depuis $\text{top}(f)$ et vers v_f ; on oriente ensuite les arêtes par triangle de proche en proche en respectant les marqueurs de coins extrémaux. Ceci est possible car les triangles contiennent en alternance zéro coins marqués (dans les faces sombres) et deux coins marqués (dans les faces claires).

On montre à présent que $\mathcal{O}$ est bien une orientation polyédrale, c'est-à-dire une triangulation eulérienne muni d'une orientation qui respecte les conditions locales (P1) et (P2). On sait déjà qu'il s'agit d'une triangulation eulérienne. Le point (c) de la construction assure que l'orientation des arêtes autour de t_{ext} alterne entre des sortantes rouges et des entrantes bleues. Pour le sommet B , comme il correspond à la source $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}_P$, on a bien une alternance avec des sortantes vertes. De plus, comme $\mathcal{S}$ est un bottom noir pour ses faces adjacentes, l'alternance se fait bien avec des arêtes entrantes rouges, au regard de la figure A.25. La preuve est symétrique

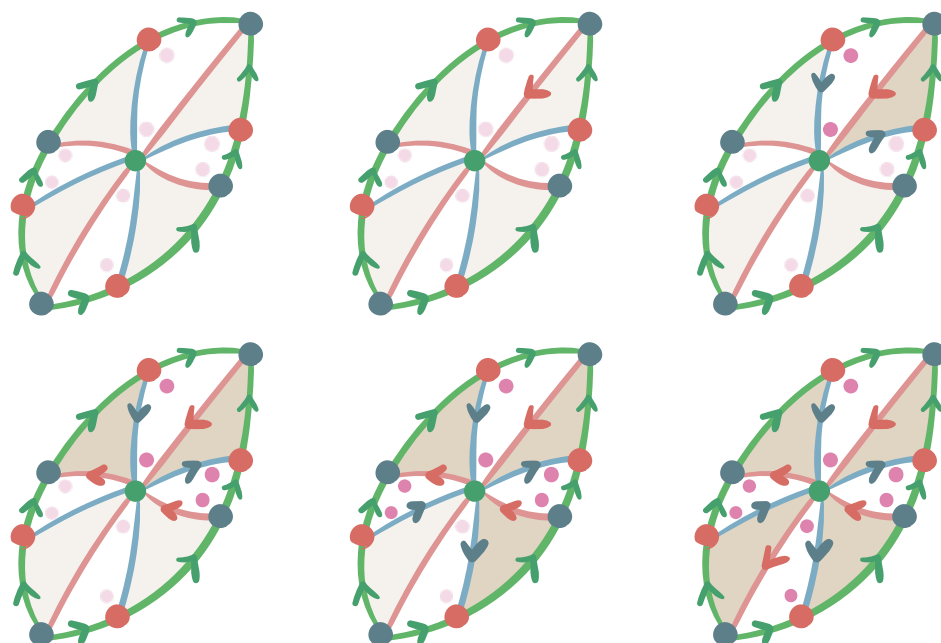


FIGURE A.26 – On colorie au fur et à mesure les arêtes à l'intérieur de f , en commençant par l'arête incidente en $\text{top}(f)$ puis de proche en proche en découvrant les coins marqués de chacun des triangles.

pour R , aussi la règle (P1) est donc assurée.

On vérifie à présent le respect de (P2). Par la construction (d) cette condition est déjà vraie aux sommets verts de $\mathcal{O}$. Si on prend maintenant un sommet interne bleu ou rouge, alors, comme vu à la Remarque 6, il est latéral dans $\mathcal{B}_P$ pour exactement deux faces. Il aura alors reçu deux marqueurs de coins extrémaux (qui correspondent aux coins attachés vus dans la preuve du sens direct). On a donc bien (P2), et $\mathcal{O}$ est bien une orientation polyédrale. ♦

Démonstration que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Les sommets verts supprimés dans le sens direct sont bien les sommets verts ajoutés dans chaque face verte dans la construction inverse. De même on a une correspondance entre les sommets rouges (resp. bleus) de $\mathcal{O}$ et les sommets blancs (resp. noirs) de $\mathcal{B}_P$. Les arêtes retirées à $\mathcal{O}$ sont bien celles ajoutées à $\mathcal{B}_P$ dans la sens inverse ; leur couleur ne dépend que de celle des sommets. Reste donc uniquement à vérifier que les orientations correspondent. Cela est trivialement le cas pour les arêtes vertes qui restent inchangées dans un sens comme dans l'autre. Comme le reste de l'orientation est uniquement déterminé par les marqueurs de coins extrémaux, il suffit de vérifier que ces derniers restent les mêmes. La propriété (Att.) sur les coins attachés démontrée sur la restriction à l'orientation bipolaire plane verte se généralise aux orientations bipolaires planes rouge et bleue. La généralisation se formule comme suit : les coins marqués à un sommet d'une couleur donnée (disons vert) se trouve

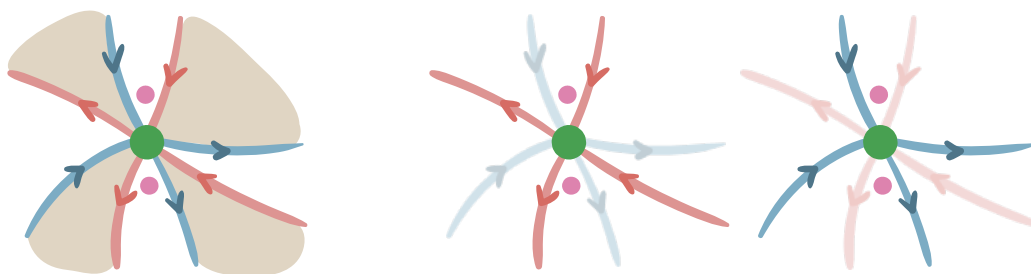


FIGURE A.27 – Les coins marqués à un sommet d’une couleur donnée (ici vert) se trouve aux seuls coins qui séparent les paquets d’entrantes et de sortantes des deux autres couleurs (ici bleues et rouges).

aux seuls coins qui séparent les paquets d’entrantes et de sortantes des deux autres couleurs (ici bleues et rouges), voir figure A.27. C’est bien là que les coins marqués ont été placés dans la reconstruction de l’orientation de $\odot$. Les deux constructions sont bien réciproques l’une de l’autre. On a donc bien démontré la Proposition A.4. ♦

Dans cette section on a défini les orientations bipolaires P-admissibles afin de les mettre en correspondance avec les orientations polyédrales. On a ensuite donné une description puis une preuve de cette correspondance. Afin d’obtenir un résultat de comptage sur les orientations polyédrales, on veut pouvoir les ramener à des marches dans le plan, dont l’étude énumérative est plus simple. Pour cela on va utiliser la description des orientations polyédrales sous forme d’orientations bipolaires planes décorées que l’on vient de donner avec Φ_P . On proposera dans la section B.6 (p.122) du chapitre B une adaptation de la bijection KMSW aux orientations bipolaires P-admissibles pour les ramener à des marches tandems dans le quart de plan.

A.5 Bijection des étiquetages de Schnyder avec les orientations bipolaires S-transverses

Dans la dernière section de ce chapitre, on souhaite décrire les étiquetages de Schnyder à l’aide d’orientations bipolaires planes qui seront (comme pour les posets plans et les structures transverses) décorées à l’aide d’arêtes transversales. Les orientations bipolaires S-transverses qui décriront les étiquetages de Schnyder sont, comme dans le cas des orientations polyédrales, des orientations bipolaires planes biparties. À nouveau on se retrouve avec des orientations bipolaires planes dont les faces autorisées varient selon que le sommet extrémal haut ($\text{top}(f)$) soit de couleur blanche ou noire (voir Remarque 34). On aura à nouveau des marches tandems bimodales qui rendront plus complexe l’étude énumérative de ces familles de cartes.

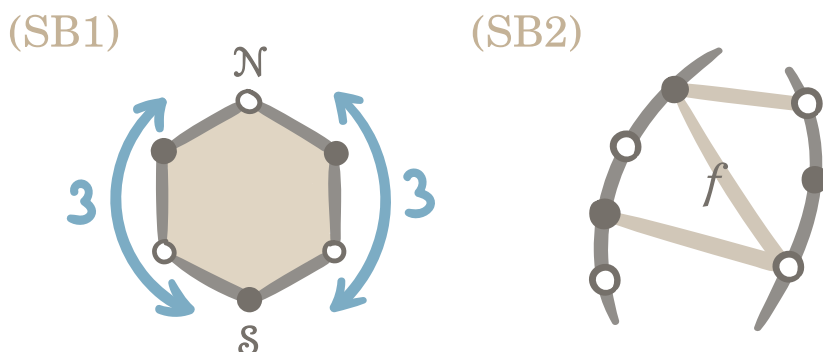


FIGURE A.28 – Une illustration des règles (SB1) et (SB2) pour les orientations bipolaires S-transverses.

Dans un premier temps, on définit la notion d'orientation bipolaire S-transverse et on donne le résultat bijectif avec les étiquetages de Schnyder (A.5.1). Puis on donne une description de la bijection (A.5.2), que l'on démontre ensuite (A.5.3).

A.5.1 Définition des orientations bipolaires S-transverses et mise en bijection

On rappelle les conventions de représentation d'une orientation bipolaire plane bipartie $\mathcal{B}$ telles énoncées à la sous-section III.1 : on prend l'unique 2-coloriage des sommets de $\mathcal{B}$ tel que le pôle nord $\mathcal{N}$ soit blanc.

Définition 33. Une *orientation bipolaire S-transverse* est une quadrangulation du 6-gone $\mathcal{B}_S$ dont les arêtes sont partitionnées en *arêtes pleines* qui sont orientées et en *arêtes transversales* qui ne le sont pas ; par ailleurs, $\mathcal{B}_S$ vérifie les deux propriétés locales suivantes :

- (SB1) L'ensemble des arêtes pleines recouvre tous les sommets de $\mathcal{B}_S$ et forme une orientation bipolaire plane bipartie $\mathcal{B}_S^b$ de type extérieur (2,2) et ayant au moins une face interne.
- (SB2) Toute arête transversale e est dans une face interne f de $\mathcal{B}_S^b$; l'arête e relie alors un sommet noir dans l'intérieur du bord latéral gauche de f et un sommet blanc à l'intérieur de son bord latéral droit. Par ailleurs dans toute face interne f de $\mathcal{B}_S^b$, tout sommet noir (resp. sommet blanc) qui se trouve dans l'intérieur du bord latéral gauche (resp. du bord latéral droit) de f est incident à au moins une arête transversale. Il existe au moins une arête transversale dans chaque face f de $\mathcal{B}_S^b$.

On peut trouver sur la figure A.28 une illustration des règles (SB1) et (SB2).

Remarque 34. Dans la condition locale (SB2) figure l'obligation pour toutes les faces internes de $\mathcal{B}_S^b$ de contenir au moins une arête transversale. Comme pour les

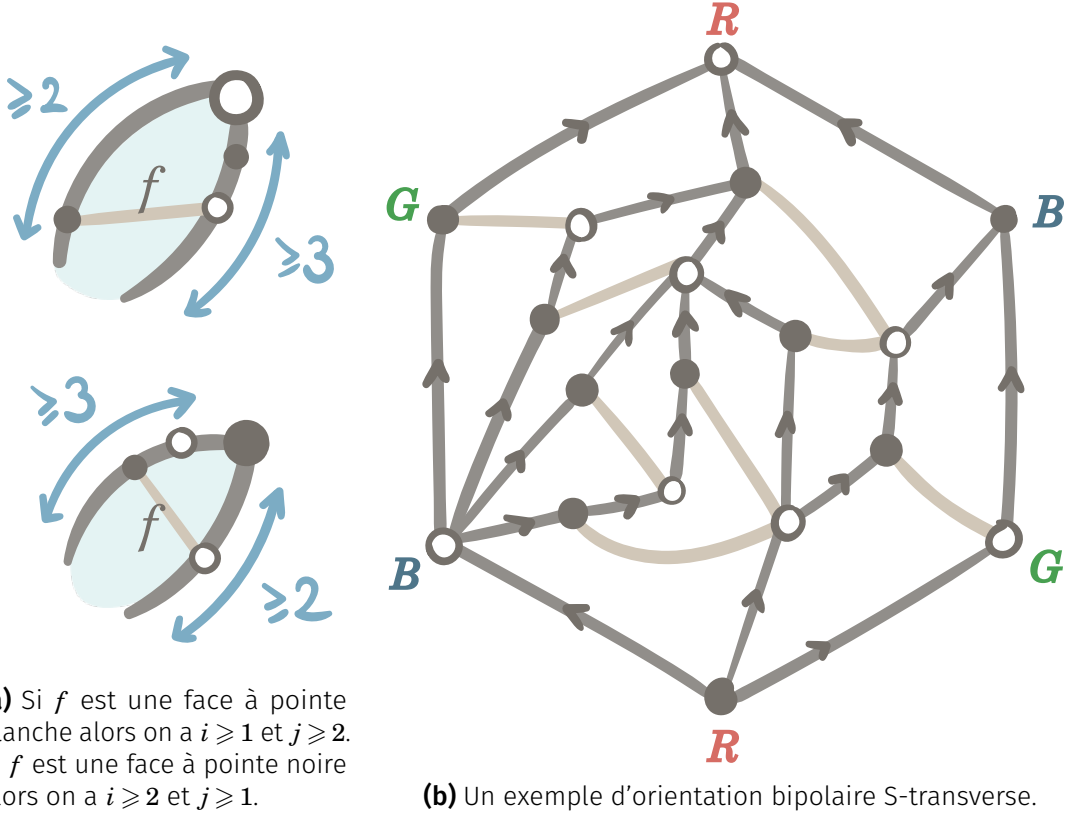


FIGURE A.29 – Conséquence de la condition (SB2) sur le degré des faces, au regard de la Remarque 34 (à gauche). Exemple d'orientation bipolaire S-transverse (à droite).

orientations bipolaires P-admissibles cette règle va se traduire en contraintes sur la taille des bords latéraux des faces selon la couleur de leur pointe. Soit f une face de $\mathcal{B}_S^b$ de type (i, j) . Si f est une face à pointe blanche alors on a nécessairement $i \geq 1$ et $j \geq 2$. De même si f est une face à pointe noire alors on doit avoir $i \geq 2$ et $j \geq 1$. Par ailleurs, le caractère biparti de l'orientation bipolaire plane se traduira par des marches paires, dont les pas-faces $(-i, j)$ vérifient que $i + j$ est pair.

On donne à la figure A.29b un exemple d'orientation bipolaire S-transverse. On a le résultat bijectif suivant entre les orientations bipolaires S-transverses et les étiquetages de Schnyder.

Proposition A.6. *L'ensemble des étiquetages de Schnyder dont les sommets externes G (voir Définition 15) ne sont pas isolés est en bijection avec l'ensemble des orientations*

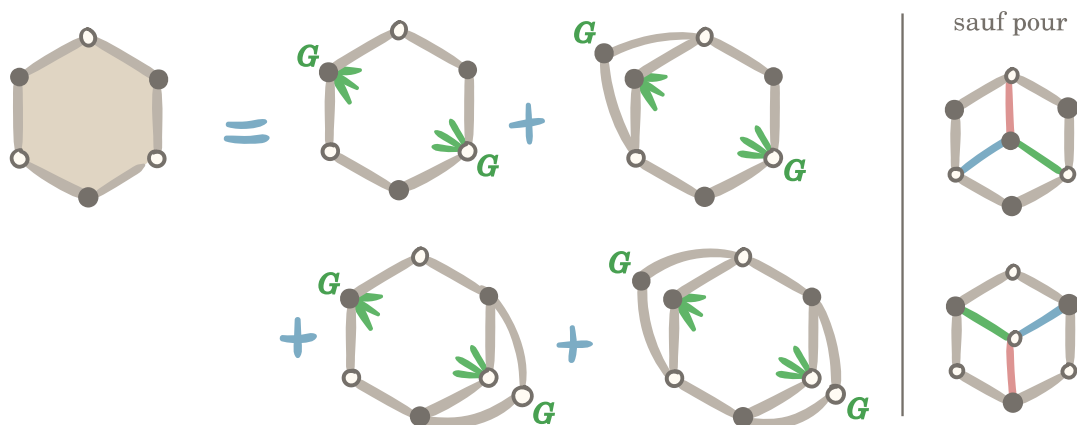


FIGURE A.30 – Une illustration de la relation $s_n = s'_n + 2s'_{n-1} + s'_{n-2}$. Les deux étiquetages de Schnyder à droite ne sont pas concernés par cette décomposition, on traite leur décompte à la main.

bipolaires S -transverses. Plus précisément on a une bijection entre :

Les étiquetages de Schnyder dont les sommets externes G ne sont pas isolés et ayant :

- n faces internes,
- $a + 1$ sommets blancs,
- $b + 1$ sommets noirs ;

Les orientations bipolaires S -transverses ayant :

- $n + 4$ sommets, parmi lesquels
- $a + 1$ sommets blancs,
- $b + 1$ sommets noirs.

On note Φ_S cette bijection. On donne une description de la bijection au paragraphe A.5.2, ainsi qu'une illustration à la figure A.32. On démontre ce résultat au paragraphe A.5.3.

On note désormais $\mathcal{S}'_n$ (resp. $\mathcal{S}'_{a,b}$) l'ensemble des étiquetages de Schnyder de $\mathcal{S}_n$ (resp. de $\mathcal{S}_{a,b}$) qui ont leurs deux sommets externes G non isolés. De même, et si $n \geq 2$, on note $s'_n = \#\mathcal{S}'_n$ (resp. $s'_{a,b} = \#\mathcal{S}'_{a,b}$) le nombre d'étiquetages de Schnyder dans $\mathcal{S}'_n$ ayant n faces internes (resp. ayant $a + 1$ sommets blancs et $b + 1$ sommets noirs).

Remarque 35. Le fait de demander à ce que les sommets externes G ne soient pas isolés ne constitue pas une réelle contrainte en ce qui concerne l'énumération des étiquetages de Schnyder. En effet, et avec les notations précédentes, on peut partitionner les éléments de $\mathcal{S}_n$ selon qu'ils aient zéro, un ou deux des deux sommets externes G qui sont isolés. On a alors $s_n = s'_n + 2s'_{n-1} + s'_{n-2}$ lorsque $n \geq 4$; voir figure A.30. Ceci est possible parce que tous les 4-cycles dans les étiquetages de Schnyder sont des faces (Proposition 11). De la même manière on a la décomposition $s_{a,b} = s'_{a,b} + s'_{a,b-1} + s'_{a-1,b} + s'_{a-1,b-1}$ pour $a, b \geq 3$.

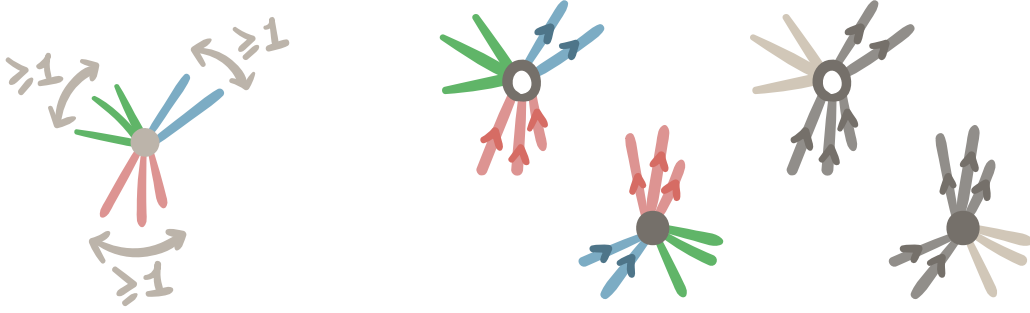


FIGURE A.31 – La traduction des conditions locales (S2) (à droite) sur les étiquetages de Schnyder en conditions locales sur les orientations bipolaires S-transverses (à gauche) au travers de la construction Φ_S . Ces règles sont valables aux sommets internes mais également aux sommets externes de par (S1) et du coloriage des arêtes externes en (b).

A.5.2 Description de la bijection Φ_S

On donne à présent une description de la bijection Φ_S ; pour mieux la comprendre on en donne également une illustration visuelle à la figure A.32. Étant donné $\mathcal{C}$ un étiquetage de Schnyder dont les sommets externes G ne sont pas isolés, on construit l'image $\mathcal{B}_S$ de $\mathcal{C}$ par Φ_S de la manière suivante :

- On note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{N}$) le sommet externe R noir (resp. blanc) ; le bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) de $\mathcal{B}_S$ est alors le chemin de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{N}$ qui a la face extérieure à sa gauche (resp. à sa droite).
- On colorie en rouge, bleu puis rouge (dans cet ordre) les trois arêtes du bord latéral gauche (resp. du bord latéral droit) que l'on vient de définir.
- On oriente toutes les arêtes rouges comme allant des sommets noirs vers les sommets blancs. On oriente toutes les arêtes bleues comme allant des sommets blancs vers les sommets noirs. En particulier le bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) est orienté de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{N}$. On laisse les arêtes vertes sans orientation.
- Les arêtes bleues et rouges définissent désormais les arêtes pleines de l'orientation bipolaire S-transverse $\mathcal{B}_S$ que nous avons construite, et les arêtes vertes jouent le rôle des arêtes transversales.

On a donné en figure A.31 la traduction des conditions locales sur les étiquetages de Schnyder au travers de la construction que l'on vient de définir.

Pour la construction inverse, étant donné $\mathcal{B}_S$ une orientation bipolaire S-transverse et $\mathcal{B}_S^b$ l'orientation bipolaire plane induite par ses arêtes pleines, on construit l'image $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}_S$ par Φ_S^{-1} de la manière suivante :

- On colorie les arêtes transversales en vert ; on colorie les arêtes (pleines) de $\mathcal{B}_S^b$ qui vont d'un sommet noir vers un sommet blanc (resp. d'un sommet blanc vers un sommet noir) en rouge (resp. en bleu).

- ǐ. On oublie la couleur des arêtes adjacentes à la face extérieure. On oublie l'orientation de toutes les arêtes de $\mathcal{B}_S^b$.
- č. On étiquette R, G, B, R, G puis B , dans le sens anti-horaire, tous les sommets de la face extérieure de $\mathcal{B}_S^b$ en commençant par son puits N .

Pour rappel, on peut trouver à la figure A.32 une illustration de la bijection Φ_S que l'on vient de décrire.

A.5.3 Démonstration de la Proposition A.6

On découpe la démonstration de la Proposition A.6 en deux parties : démontrer que l'image de Φ_S est bien celle annoncée ; faire la même vérification pour Φ_S^{-1} .

Démonstration du sens direct. On reprend la construction de Φ_S décrite au paragraphe A.5.2. On veut montrer que la carte $\mathcal{B}_S$ que l'on a construite est bien une orientation bipolaire S-transverse. Il s'agit bien d'une quadrangulation du 6-gone puisque $\mathcal{C}$ était déjà une quadrangulation du 6-gone et que l'on a ajouté ou supprimé ni arête ni sommet. Reste à montrer que $\mathcal{B}_S$ vérifie les règles (SB1) et (SB2).

On appelle $\mathcal{B}_S^b$ la carte formée par les arêtes pleines de $\mathcal{B}_S$, on veut montrer que $\mathcal{B}_S^b$ est une orientation bipolaire plane de source S et de puits N . La condition locale (S2) assure que tous les sommets internes étaient incidents à au moins une arête bleue et au moins une arête rouge. Tous les sommets internes ont donc chacun reçu au moins une arête entrante et au moins une arête sortante en (c). Pour les sommets externes le coloriage en (b) et l'orientation en (c) justifie que S (resp. N) est l'unique source (resp. puits) de $\mathcal{B}_S^b$.

On montre que l'orientation sur $\mathcal{B}_S^b$ est acyclique. Supposons qu'elle admette un cycle γ , que l'on prend minimal au sens de l'inclusion. C'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre cycle orienté contenu dans l'intérieur γ° de γ . Les conditions locales (S2) et (S1) impliquent que si γ est un cycle orienté dans le sens horaire (resp. dans le sens anti-horaire), alors il y a nécessairement une arête transversale e dans γ° , incidente en un sommet noir (resp. blanc) de γ ; on note v son autre extrémité (voir figure A.33a). Le sommet v est strictement dans γ° car $\mathcal{C}$ est bipartie et que les règles (S2)-(S1) interdisent que e soit une corde de γ . Comme S et N sont les seuls sources et puits de $\mathcal{B}_S^b$ et sont en dehors de γ° , on peut construire un chemin d'arêtes sortantes qui démarre en v et qui ne peut pas boucler (par minimalité de γ) et qui rejoint donc un sommet v' sur γ (voir figure A.33b). De même on construit un chemin d'arêtes entrantes qui part de v et qui doit rejoindre un sommet $v'' \neq v'$ sur γ . Or ces deux chemins, en plus de la partie de γ qui relie v' à v'' , forment un cycle orienté contenu dans γ° , ce qui contredit la minimalité de γ (voir figure A.33c). On a donc montré que $\mathcal{B}_S^b$ est acyclique et $\mathcal{B}_S^b$ est donc une orientation bipolaire plane.

Reste à démontrer que $\mathcal{B}_S$ vérifie la condition (SB2). Si e est une arête transversale, elle est bien dans une face interne f de $\mathcal{B}_S^b$. Et la condition (S2) (et (S1) aux sommets externes) implique que l'origine de e est un sommet noir qui est nécessairement sur le bord latéral gauche de f . De même on a que la cible de e est un sommet blanc

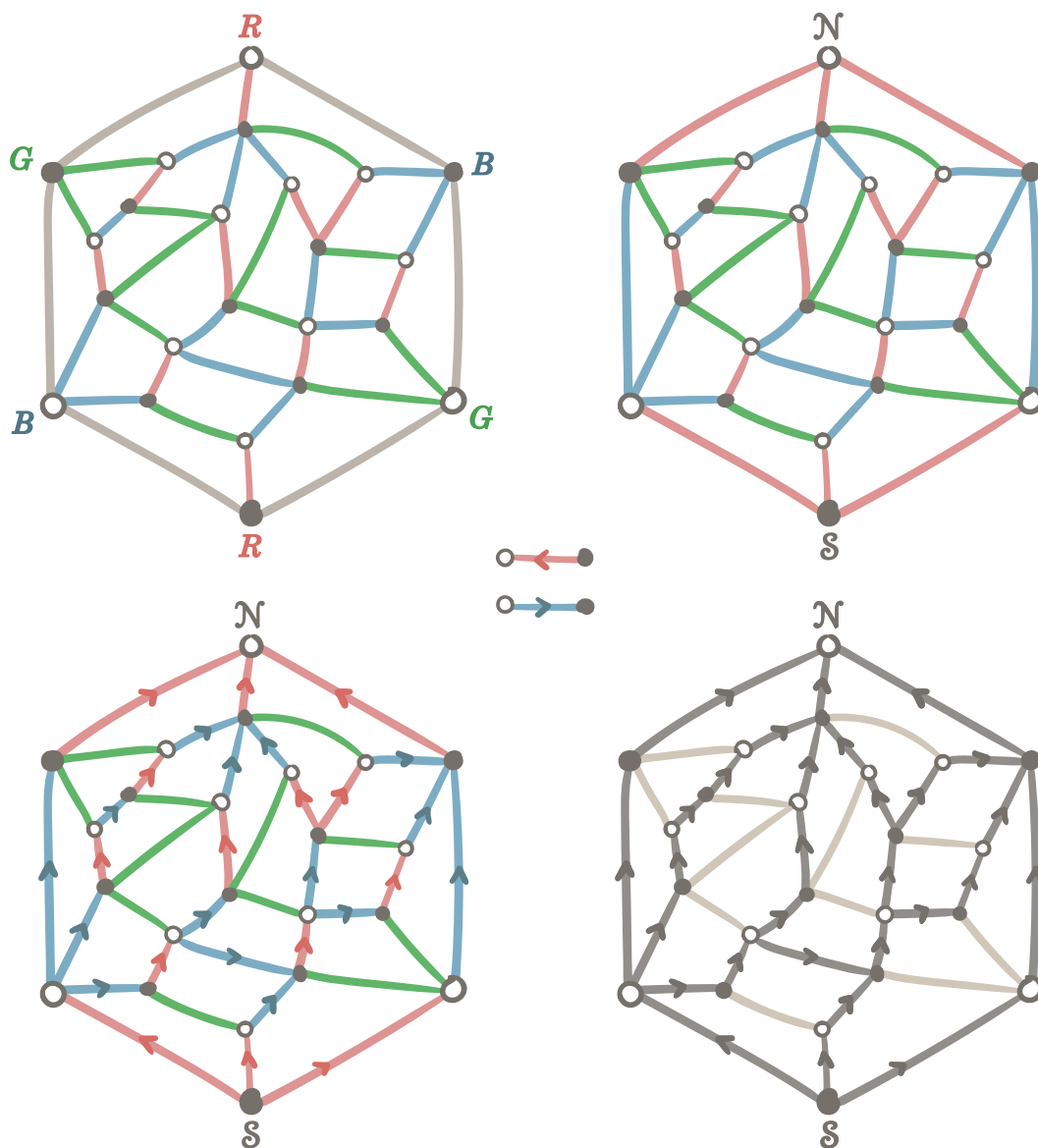


FIGURE A.32 – Une illustration de la bijection Φ_S entre les étiquetages de Schnyder ayant leurs sommets externes G non isolés et les orientations bipolaires S -transverses. Les étapes de la construction Φ_S se lisent de haut en bas, de gauche à droite. Les étapes de la construction inverse se lisent à rebours.

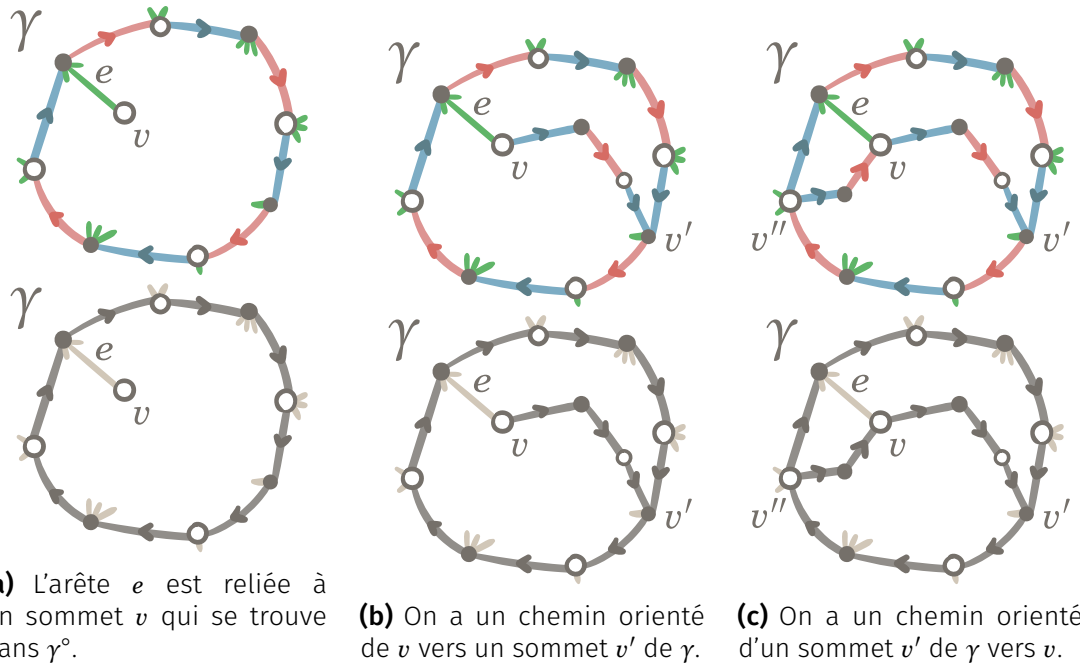


FIGURE A.33 – On montre que le cycle γ n'est en fait pas minimal, ce qui justifie que $\mathcal{B}_S^b$ est bien acyclique. On traite ici le cas où γ est un cycle horaire, le cas anti-horaire est symétrique. En haut on donne la description de γ dans $\mathcal{C}$ et en bas la traduction dans $\mathcal{B}_S$.

sur le bord latéral droit de f (voir figure A.31). On doit également montrer que tout sommet noir (resp. blanc) qui se trouve à l'intérieur du bord latéral gauche (resp. bord latéral droit) de f admet une arête transversale. Pour les sommets internes, ceci découle directement de la traduction figure A.31. Pour les sommets sur la face extérieure on utilise également le fait que les deux sommets externes G ne sont pas isolés. On a donc bien (SB2) et on a montré que $\mathcal{B}_S$ est bien une orientation bipolaire S-transverse. ♦

Démonstration du sens indirect. On reprend la construction de Φ_S^{-1} décrite au paragraphe A.5.2. On veut montrer que $\mathcal{C}$ est un étiquetage de Schnyder, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une quadrangulation du 6-gone dont les arêtes sont coloriées en rouge, vert et bleu, en respectant les conditions (S1) et (S2). On veut également montrer que les deux sommets externes G ne sont pas isolés. Encore une fois, il est clair que $\mathcal{C}$ est une quadrangulation du 6-gone.

Montrons déjà la règle (S1). Soit v un sommet interne, la condition (B) et le coloriage en (ä) impliquent qu'il y a deux paquets non vides autour de v : un paquet d'arêtes rouges et un paquet d'arêtes bleues. Par ailleurs la règle locale (SB2) assure qu'il y a un troisième paquet d'arêtes, vertes, et qui se trouve bien entre les arêtes rouges et bleues dans l'ordre horaire autour de v (voir figure A.31). On a bien (S1).

Le sommet externe G qui se situe en haut à gauche (resp. en bas à droite) de $\mathcal{C}$ est un sommets noir (resp. blanc) sur le bord latéral gauche (resp. sur le bord latéral droit) d'une face interne $\mathcal{B}_S^b$ et est donc incident à au moins une arête transversale en vertu de (SB2). Les sommets externes G ne sont donc pas isolés.

Montrons enfin (S2). Au préalable, on fait les trois constats suivants sur les sommets externes B et G de $\mathcal{C}$:

- (i) La condition (SB2) implique que toutes les faces intérieures de $\mathcal{B}_S^b$ ont au moins un sommet noir à l'intérieur de leur bord latéral gauche. De même on a au moins un sommet blanc à l'intérieur de leur bord latéral droit. Ainsi le sommet G en haut à gauche (resp. en bas à droite) a un degré sortant (resp. un degré entrant) de 1. Il n'y a pas d'arête interne bleue incidente aux sommets G .
- (ii) La condition (SB2) implique que chaque face contient au moins une arête transversale, aussi une face a ses deux bords latéraux de longueur au moins 2. Les sommets B et G noirs (resp. blancs) ont donc un degré sortant (resp. degré entrant) d'au plus 1. Il n'y a pas d'arête interne rouge incidente aux sommets G et B .
- (iii) Enfin, toujours en utilisant la règle (SB2) on a que le sommet B en bas à gauche (resp. en haut à droite) est blanc (resp. noir) et se trouve sur le bord latéral gauche (resp. sur le bord latéral droit) d'une face interne. Ils ne peuvent donc pas avoir d'arêtes transversales incidentes. Il n'y a donc pas d'arêtes vertes incidentes aux sommets B .

On résume les propriétés que l'on vient de donner : les sommets B (resp. les sommets G) ont toutes les arêtes internes incidentes coloriées en bleu (resp. en vert) en vertu de (ii) et (iii) (resp. en vertu de (i) et (iii)). Enfin le sommet R en haut (resp.

en bas) de $\mathcal{C}$ n'est incident qu'à des arêtes rouges puisqu'il s'agit d'un sommet blanc (resp. noir) avec uniquement des arêtes entrantes (resp. sortantes) dans $\mathcal{B}_S$. On a donc bien montré (S2) et $\mathcal{C}$ est donc bien un étiquetage de Schnyder dont les sommets externes G ne sont pas isolés. ♦

Enfin, les deux constructions sont clairement inverses l'une de l'autre. Ce qui achève la démonstration de la Proposition A.6

Dans cette section on a défini les orientations bipolaires S-transverses afin de les mettre en correspondance avec les étiquetages de Schnyder. On a ensuite donné une description puis une preuve de cette correspondance. Afin d'obtenir un résultat de comptage sur les étiquetages de Schnyder, on veut pouvoir les ramener à des marches dans le plan, dont l'étude énumérative est plus simple. Pour cela on va utiliser la description des étiquetages de Schnyder sous forme d'orientations bipolaires planes décorées que l'on vient de donner avec Φ_S . On proposera dans la section B.7 (p.124) du chapitre B une adaptation de la bijection KMSW aux orientations bipolaires S-transverses pour les ramener à des marches tandems dans le quart de plan.

Conclusion Comme annoncé, ce chapitre aura essentiellement consisté à ramener des familles de cartes décorées à des orientations bipolaires planes ayant de bonnes propriétés. Dans tous les cas, il s'agit de propriétés attachées aux faces des orientations bipolaires : soit des contraintes sur la tailles des bords latéraux gauches et droits des faces ; ou encore des arêtes transversales attachées aux faces. On a résumé dans le tableau ci-dessous les correspondances que l'on a démontrées.

Modèle de carte décorée	Orientations bipo.	Énoncé bijectif
posets plans	V-transverses	Φ_V Prop. A.1, §A.1.1, p.71
bois de Schnyder triangulés	W-admissibles	Φ_W Prop. A.2, §A.2.1, p.77
structures transverses	T-transverses	Φ_T Prop. A.3, §A.3.1, p.85
orientations polyédrales	P-admissibles	Φ_P Prop. A.4, §A.4.1, p.90
étiquetages de Schnyder	S-transverses	Φ_S Prop. A.6, §A.5.1, p.100

On souhaite pouvoir obtenir des résultats de comptage (exacts et asymptotiques) sur ces familles de cartes. Pour cela on va d'abord mettre en bijection ces familles des cartes avec des marches dans le quart de plan. On se servira de la bijection KMSW [Ken+19] pour faire cette correspondance. Le fait que les décorations portent essentiellement sur les faces, pour les cinq familles d'orientations bipolaires planes que nous avons introduit, n'est pas anodin. En effet la bijection KMSW décrit une construction où les faces sont ajoutées une à une, avec un grand contrôle sur la taille des faces. Nous avons donc judicieusement décoré nos modèles d'orientations bipolaires planes afin de les ramener à des marches tandems, ce que nous décrivons dans le chapitre suivant.



Bijection des orientations bipolaires décorées avec des marches tandems dans le quart de plan

Sommaire

B.1 Introduction des marches tandems décorées	110
B.2 Bijection des posets plans avec les marches tandems E-admissibles	111
B.3 Bijection des posets plans avec les marches tandems V-admissibles	113
B.3.1 Définition des marches tandems V-admissibles et mise en bijection	113
B.3.2 Description de Ψ_V et démonstration de la Proposition B.2	114
B.4 Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les marches tandems W-admissibles	116
B.5 Bijection des structures transverses avec les marches tandems T-admissibles	119
B.5.1 Définition des marches tandems T-admissibles et mise en bijection	119
B.5.2 Description de Ψ_T et démonstration de la Proposition B.4	120
B.5.3 Restriction de Ψ_T aux structures transverses triangulées	121
B.6 Bijection des orientations polyédrales avec les marches tandems P-admissibles	122
B.6.1 Définition des marches tandems P-admissibles et mise en bijection	123
B.6.2 Description de Ψ_P et démonstration de la Proposition B.5	124
B.7 Bijection des étiquetages de Schnyder avec les marches tandems S-admissibles	124
B.7.1 Définition des marches tandems S-admissibles et mise en bijection	125
B.7.2 Description de Ψ_S et démonstration de la Proposition B.6	126

Introduction Dans ce chapitre on va mettre en bijection les familles de cartes décorées que l'on étudie, avec des marches tandems dans le quart de plan.

Ces bijections avec des marches contraintes vont nous permettre de faciliter l'étude énumérative de ces familles. On souhaite, par la suite, utiliser les résultats de A. Bostan, K. Raschel, et B. Salvy [BRS14] sur les marches contraintes au quart de plan pour en déduire les comportements asymptotiques de ces familles de cartes. Pour obtenir ces bijections avec des marches tandems, nous nous servons de la bijection KMSW [Ken+19] que nous spécialisons aux familles d'orientations bipolaires planes que nous avons obtenues au chapitre A. Lorsque nous avons écrit ces descriptions sous forme d'orientations bipolaires planes, nous avons alors pris soin à ce que les décorations portent sur les faces des cartes que nous introduisons. Il s'agissait, en effet, de contraindre la taille des faces ; ou encore d'associer, aux faces, des arêtes, dites *transversales*, qui traversaient ces faces de part en part. La bijection KMSW donne une grande marge de manœuvre sur le contrôle de la taille des faces ; et nous allons voir les décorations sur celles-ci comme des décorations sur les pas-faces qui les décrivent.

À nouveau nous traitons les familles une à une. Dans la première section (B.1), nous donnons quelques outils pour décorer les pas-faces des marches tandems. Les sections B.2 et B.3 sont dédiées à décrire, sous forme de marches tandems, les posets plans ; la première fois la taille de la marche code le nombre d'arêtes du poset plan, la seconde fois il décrit son nombre de sommets. Dans les sections B.4 et B.5, on donne des correspondances entre des marches tandems et, respectivement, les bois de Schnyder triangulés et les structures transverses. Enfin les deux dernières sections (B.6 et B.7) décrivent, elles, les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder, sous forme de marches dans le quart de plan. Pour ces deux dernières familles, la description est un peu plus compliquée, et les marches sont alors *bimodales* : elles fonctionnent sous deux régimes. Plus précisément, l'ensemble des pas autorisés dépend de la parité de l'ordonnée courante du chemin. Cette propriété bimodale est une conséquence de la distinction faite, à la fin du chapitre A, sur la taille des faces, selon qu'elles soient à pointes noires ou à pointes blanches.

B.1 Introduction des marches tandems décorées

Dans cette première partie on décrit les marches tandems paires ainsi que deux modes de décoration des marches tandems : par pondération numérique, ou par décoration avec un chemin à petits pas. L'introduction de ces quelques notions nous servira, dans les sections suivantes, à traduire les décorations sur les faces des orientations bipolaires planes que nous avons données au chapitre A.

Définition 36. On dit qu'une marche tandem est *paire* lorsque tous ses pas-faces $(-i, j)$ vérifient que la somme $i + j$ est paire.

Nous avons l'outil suivant pour décrire les marches tandems paires au travers de la bijection KMSW.

Remarque 37. La bijection KMSW [Ken+19], énoncée au Théorème 14, se spécialise aux marches tandems paires et permet de décrire les orientations bipolaires planes biparties. En effet une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ est bipartie si et seulement si toutes ses faces sont de degré pair. Cela revient bien à demander que, dans sa marche tandem associée, tous les pas-faces $(-i, j)$ vérifient $i + j$ pair.

De plus, comme vu à la Remarque 22, la hauteur courante $y - y_{\min}$ lors de la construction KMWS correspond à la distance entre le sommet marqué courant et le pôle nord N . Aussi les sommets blancs (resp. noirs) de $\mathcal{B}$ (hormis S et N) correspondent aux pas SE de la marche tandem qui commencent à un y pair (resp. impair). De la même manière, les faces internes à pointe blanche (resp. à pointe noire) dans $\mathcal{B}$ correspondent aux pas-faces qui démarrent à une hauteur y paire (resp. impaire).

On se servira de la remarque précédente sur les orientations bipolaires planes biparties aux sections B.6 et B.7, où les tailles des faces autorisées dépendent de la couleur de la pointe de la face. Aussi nous serons obligés de distinguer l'ensemble des pas faces autorisés selon les coordonnées courantes de la marche. On donne à présent deux manières de décorer un pas-face.

Définition 38. Soient s un pas d'une marche tandem et w un entier strictement positif; on dit que le pas s a un *poids* w lorsque s vient avec un entier dans $\llbracket 1, w \rrbracket$. On parle de marche tandem *pondérée* pour désigner une marche tandem qui admet des pas avec des poids non tous égaux à 1. En l'absence d'indication un pas aura un poids égal à 1.

Définition 39. Soit S un ensemble de pas, on dit qu'une marche tandem est *décorée par une marche sur S* lorsque ses pas-faces $(-i, j)$ se voient attacher une marche sur S allant de $(0, 0)$ à $(-i, j)$. On pourra également préciser des contraintes sur les chemins attachés, comme par exemple des successions de pas interdits.

Bien entendu une marche tandem décorée par une marche sur S peut être ramenée à une marche tandem pondérée. On pondère alors le pas-face $(-i, j)$ par le nombre de manières qu'il y a de réaliser $(-i, j)$ avec une marche sur S . La description à l'aide de marches nous facilitera le travail quand il s'agira de décrire nos modèles à l'aide de marches à petits pas, au chapitre C.

B.2 Bijection des posets plans avec les marches tandems E-admissibles

En guise de premier exemple très simple de spécialisation de la bijection KMSW (Théorème 14) on peut se servir de la Proposition 7 (p.32) pour mettre en correspondance l'ensemble des posets plans avec des marches tandems dans le quart de plan.

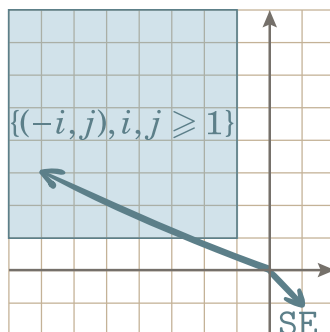


FIGURE B.1 – Les pas autorisés pour les marches tandems E-admissibles sont le pas sud-est SE et les pas faces $\{(-i, j), i, j \geq 1\}$.

En effet la Proposition 7 assure que les posets plans sont exactement les orientations bipolaires planes dont toutes les faces ont leur type (i, j) qui vérifie $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

Définition 40. Une *marche tandem E-admissible* est une marche tandem telle que tous les pas-faces, de la forme $(-i, j)$, vérifient $i, j \geq 1$. On peut trouver sur la figure B.1 une illustration des pas autorisés par la marche.

On a donc le résultat suivant, comme un corollaire direct de la bijection KMSW et de la Proposition 7.

Corollaire B.1. *Les posets plans sont en bijection avec les marches tandems E-admissibles, contraintes au quart de plan, partant de l'axe y des ordonnées et terminant le long de l'axe x des abscisses. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les posets plans avec les paramètres suivants :

- n arêtes,
- $k + 2$ sommets,
- un type extérieur (a, b) ;

Les marches tandems E-admissibles dans le quart de plan ayant :

- $n - 1$ pas,
- dont k pas SE,
- commençant en $(0, a)$,
- terminant en $(b, 0)$.

On note Ψ_E cette bijection.

On vient de donner une première correspondance de nos modèles de cartes planes décorées à l'aide de marches tandems dans le quart de plan. Cette première spécialisation aux posets plans sera adaptée à la section B.5 (p.119) étant donné que les orientations bipolaires T-transverses sont construites sur la base de posets plans.

Au paragraphe C.2 (p.136), on utilisera le résultat que l'on vient de démontrer pour donner des résultats de comptage exact pour les posets plans comptés par arêtes. Au paragraphe D.1.1 (p.160) on en tirera des résultats d'énumération asymptotique. Dans la section suivante on décrit toujours les posets plans, mais cette fois-ci comptés par sommets.

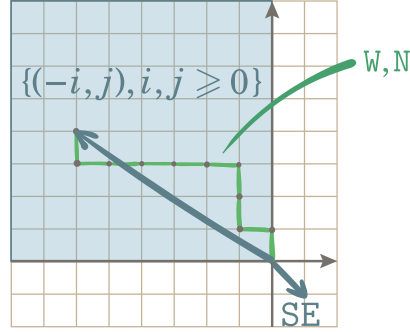


FIGURE B.2 – Les pas autorisés pour les marches tandems V-admissibles sont le pas sud-est SE et les pas-faces $\{(-i, j), i, j \geq 0\}$ qui sont décorés par une marche sur $\{W, N\}$.

B.3 Bijection des posets plans avec les marches tandems V-admissibles

Le but est ici de donner une autre description des posets plans à l'aide de marches tandems, où cette fois la longueur de la marche correspond non pas au nombre d'arêtes mais au nombre de sommets^a.

Dans cette section on utilise la bijection entre les posets plans et les orientations bipolaires V-transverses donnée à la section A.1 (p.71) pour les mettre en correspondance avec des marches tandems décorées par des petits pas : les marches tandems V-admissibles. On commence par définir ces marches et énoncer le résultat bijectif (paragraphe B.3.1) puis on donne une description et une démonstration du résultat (paragraphe B.3.2). On montre également comment on peut retrouver les posets plans sans N -pattern dont on a généralisé la description bipolaire à la Remarque 27 (p.75).

B.3.1 Définition des marches tandems V-admissibles et mise en bijection

Définition 41. Une *marche tandem V-admissible* est une marche tandem décorée par une marche sur $\{W, N\}$. On remarque que cela revient également à pondérer les pas-faces $(-i, j)$ par un coefficient $\binom{i+j}{i}$. On peut trouver sur la figure B.2 une illustration des pas considérés par ces marches.

a. On remarque qu'il est en réalité possible de compter le nombre de sommets du poset plan à l'aide de la bijection donnée à la section précédente (Corollaire B.1). Il suffit en fait de compter le nombre de pas SE de la marche associée.

Proposition B.2. *Les posets plans comptés par le nombre de sommets sont en bijection avec les marches tandems V-admissibles contraintes au quart de plan. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les posets plans avec les paramètres suivants :

- $n + 2$ sommets,
- k faces internes,
- un pôle-type (p, q) ;

On note Ψ_V cette bijection.

Les marches tandems V-admissibles dans le quart de plan, ayant :

- $n - 1$ pas, parmi lesquels
- k pas SE,
- et allant de $(0, p)$ à $(q, 0)$.

Le paragraphe suivant est consacré à expliciter le fonctionnement de cette bijection Ψ_V et à donner une preuve de la correspondance.

B.3.2 Description de Ψ_V et démonstration de la Proposition B.2

Démonstration de la Proposition B.2. Par la Proposition A.1 (p.73) on sait déjà que les posets plans sont en bijection avec les orientations bipolaires V-transverses. On rappelle qu'une orientation bipolaire V-transverse $\mathcal{B}_V$ est une orientation bipolaire plane $\mathcal{B}$ ayant été 2-subdivisée via (VB1) et à laquelle on a ajouté des arêtes transversales selon (VB2). Le caractère bipolaire peut être décrit par la bijection KMSW (voir Théorème 14). Aussi il reste à montrer que les ajouts faits aux faces internes de $\mathcal{B}$ sont bien décrits par la décoration sur les pas-faces des marches tandems V-admissibles.

Soit f une face interne de $\mathcal{B}$, de type (i, j) , il y a bien une unique manière de réaliser une 2-subdivision des arêtes de f . Il s'agit surtout de montrer que toutes les manières d'ajouter des arêtes transversales à f en respectant (VB2) sont encodés par toutes les manières qu'il y a pour décorer le pas-face $(-i, j)$ correspondant à l'aide d'une marche w sur $\{W, N\}$. On décrit la construction de la complétion transverse de f à partir du chemin w :

- a. Durant toute la complétion, on maintient deux sommets marqués v_ℓ et v_r . Où v_ℓ est un sommet de subdivision sur le bord latéral gauche de f et v_r sur son bord latéral droit. On démarre avec v_ℓ (resp. avec v_r) sur le sommet blanc qui se trouve en haut de la première arête sur le bord latéral gauche de f (resp. bord latéral droit de f). Au début de la construction on ajoute une arête orientée rouge, dirigée depuis v_ℓ et vers v_r , ce qui ajoute une face $\mathfrak{V}_b$ au-dessous de cette arête.
- b. On parcourt le chemin w du début à la fin. Lorsque l'on voit un pas W (resp. un pas N), on déplace le sommet marqué v_ℓ (resp. v_r) au prochain sommet blanc le long du bord latéral gauche de f (resp. du bord latéral droit de f). Ensuite on ajoute une arête orientée rouge, dirigée depuis v_ℓ et vers v_r . Avec cette construction on constate que les pas W correspondent aux faces $\mathfrak{V}_l$ et les pas N aux faces $\mathfrak{V}_r$.

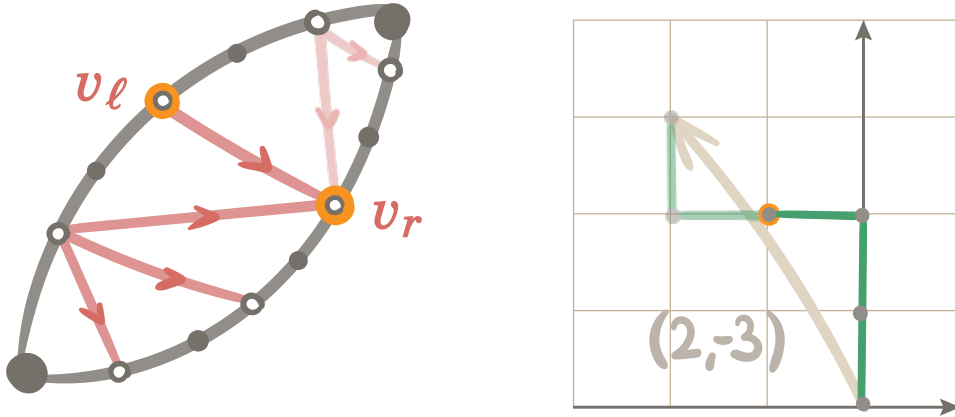


FIGURE B.3 – Un exemple d’une complétion transverse d’une face interne d’orientation bipolaire V-transverse à l’aide d’une marche sur $\{W, N\}$.

- c. À la fin de la construction on a vu i pas W et j pas N et donc les sommets v_ℓ et v_r se trouvent bien sur les derniers sommets blancs le long des bords latéraux gauche et droit de f . On termine donc avec une face $\mathfrak{V}_\ell$ au-dessus de la dernière arête ajoutée.

La face ainsi complétée respecte bien (VB2). On donne à la figure B.3 un exemple de complétion d’une telle face interne f à l’aide d’une marche sur $\{W, N\}$. On peut clairement revenir dans l’autre sens, par exemple en prenant les faces de $\mathcal{B}_V$ situées à l’intérieur de f du bas vers le haut ; et associant un pas W aux faces $\mathfrak{V}_\ell$ et un pas N aux faces $\mathfrak{V}_r$. On a donc bien décrit une correspondance entre les complétions transversales de f et les marches sur $\{W, N\}$ attachées au pas-face $(-i, j)$.

Enfin la correspondance entre les paramètres est assurée par celles de la Proposition A.1 (p.73) et de la bijection KMWS au Théorème 14 (p.61). ♦

Remarque 42. Il est possible, là encore, de restreindre la bijection aux orientations bipolaires planes sans N -pattern comme nous l’avons fait à la Remarque 27 (p.75). Alors, les pas-faces de la marche tandem V-admissible ne sont plus décorés ; ou plutôt : chaque pas-face $(-i, j)$ est décoré par la marche allant de $(0, 0)$, terminant en $(-i, j)$ et commençant par i pas W ensuite suivis de j pas N (voir un exemple à la figure B.4).

Dans cette section on a donné une seconde correspondance entre les posets plans et des marches tandems dans le quart de plan. Cette fois-ci la taille de la marche correspond aux nombre de sommets du poset plan, là où il comptait le nombre d’arêtes au Corollaire B.1. On a également montré comment retrouver les posets plans sans N -pattern via cette description.

Au paragraphe C.3 (p.139), on utilisera le résultat que l’on vient de démontrer pour donner des résultats de comptage exacts pour les orientations bipolaires V-transverses comptées par sommets. Au paragraphe D.1.2 (p.162) on en tirera des

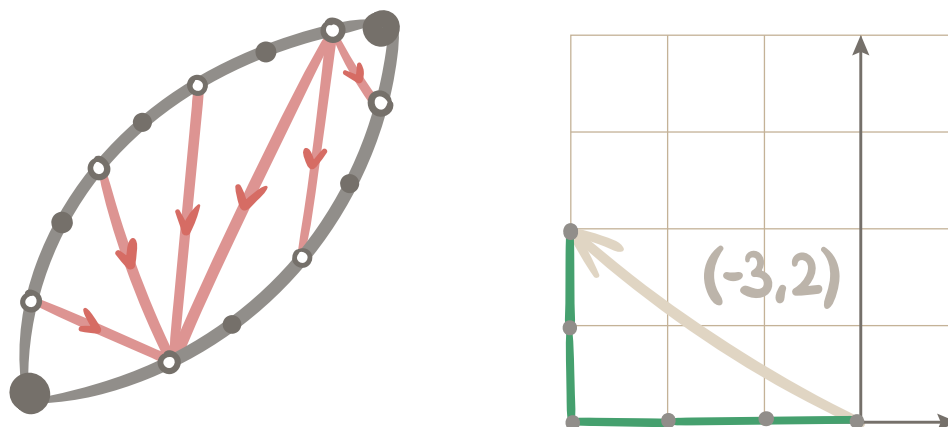


FIGURE B.4 – Un exemple d’une complétion transverse d’une face interne d’orientation bipolaire V-transverse sans N -pattern à l’aide d’une marche sur $\{W, N\}$. On réalise en premiers les pas W avant de faire des pas N .

résultats d’énumération asymptotique. Dans la section suivante on donne une correspondance pour les bois de Schnyder triangulés.

B.4 Bijection des bois de Schnyder triangulés avec les marches tandems W -admissibles

On donne une autre traduction aux marches tandems, cette fois-ci pour les bois de Schnyder triangulés. Il s’agit ici d’une application assez directe de la bijection KMSW au résultat de la Proposition A.2 (p.78) puisque les règles sur les orientations bipolaires W -admissibles consistent simplement à imposer un type $(i, 1)$ pour les faces internes et une face extérieure de type $(0, q)$ pour $q \geq 1$.

Définition 43. Une *marche tandem W -admissible* est une marche tandem telle que tous les pas-faces sont de la forme $(-i, 1)$ pour un certain $i \geq 0$. On peut trouver sur la figure B.5 une illustration des pas autorisés par la marche.

Proposition B.3. *L’ensemble des bois de Schnyder triangulés est en bijection avec l’ensemble des marches tandems W -admissibles contraintes au quart de plan. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les bois de Schnyder triangulés avec au moins un sommet interne et ayant :

- $\deg(V) = q + 2$,
- $2n$ arêtes rouges ou bleues,
- $n + 3$ sommets ;

On note Ψ_W cette bijection.

Les marches tandems W -admissibles :

- allant de $(0, 0)$ à $(q, 0)$,
- ayant $2n$ pas, parmi lesquels
- n pas SE.

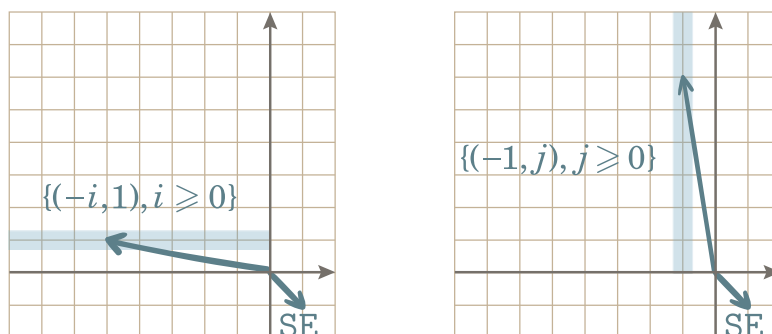


FIGURE B.5 – Les pas autorisés pour les marches tandems W-admissibles sont le pas sud-est SE et les pas-faces $\{(-i, 1), i \geq 0\}$ (à gauche). Comme précisé à la Remarque 44, on aurait également pu décrire les bois de Schnyder triangulés à l’aide de marches autorisant le pas SE et des pas-faces $\{(-1, j), j \geq 0\}$ (à droite).

Remarque 44. On aurait également pu choisir de se servir de la famille d’orientations bipolaires planes alternatives décrites à la Remarque 29. Dans ce cas les bois de Schnyder triangulés auraient été en bijection avec des marches tandems telles que tous les pas-faces sont de la forme $(-1, j)$ pour un certain $j \geq 0$. Dans ce cas-là on aurait mis en bijection les structures transverses dont le sommet V est de degré $p + 2$ avec les marches allant de $(p, 0)$ à $(0, 0)$.

Il est également possible de passer directement des marches tandems qui sont W-admissibles à ces marches tandems alternatives en renversant le sens de la marche et en réalisant une symétrie le long de l’axe $x = y$. On donne une illustration à la figure B.6.

À la section B.7 (p.124) on donnera une démonstration alternative du résultat bijectif que l’on vient d’énoncer à la Proposition B.3. En effet, il est possible de voir les bois de Schnyder triangulés comme un cas particulier d’étiquetages de Schnyder et l’on spécialisera les marches tandems correspondantes pour retrouver les marches tandems W-admissibles. Ces marches, dites *S-admissibles*, seront ensuite utilisées pour décrire le comportement exact (section C.7, p.151) et asymptotique (section D.3, p.172) des étiquetages de Schnyder que l’on pourra à nouveau spécialiser aux bois de Schnyder triangulés. Dans la section suivante, on s’intéresse cette fois-ci aux structures transverses.

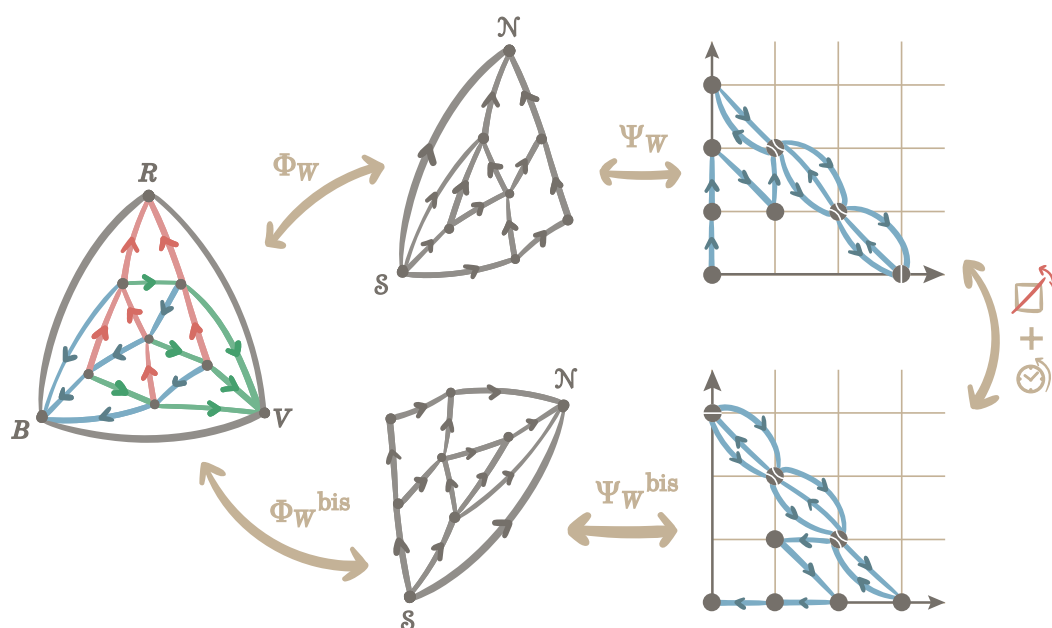


FIGURE B.6 – Si on avait renversé les arêtes rouges au lieu des bleues (voir Remarque 29) on aurait obtenu une décomposition alternative sous forme de marches tandems (voir Remarque 44). On peut passer d’une marche à l’autre par une symétrie d’axe $x = y$ suivie d’un renversement du sens de parcours du chemin.

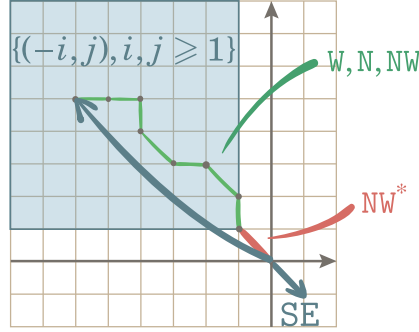


FIGURE B.7 – Les pas autorisés pour les marches tandems T-admissibles sont le pas sud-est SE et les pas-faces $\{(-i, j), i, j \geq 1\}$ qui sont décorés par une marche sur $\{W, N, NW\}$ et qui commencent par un pas marqué NW^* .

B.5 Bijection des structures transverses avec les marches tandems T-admissibles

On donne dans cette section une description des structures transverses à l'aide de marches décorées : les marches tandems T-admissibles. On utilise pour cela la bijection avec les orientations bipolaires T-transverses donnée à la section A.3 (p.84). On commence par définir ces marches T-admissibles décorées par des petits pas et on énonce le résultat bijectif (paragraphe B.5.1) puis on donne une description et une démonstration du résultat (paragraphe B.5.2). Enfin, on donne une spécialisation de cette bijection aux structures transverses triangulées (paragraphe B.5.3).

B.5.1 Définition des marches tandems T-admissibles et mise en bijection

Définition 45. Une *marche tandem T-admissible* est une marche tandem décorée par une marche sur $\{W, N, NW, NW^*\}$, où le pas NW^* est un pas NW que l'on dira *marqué* ; on demande également à ce que la marche vérifie :

- que tous les pas-faces $(-i, j)$ vérifient que $i \geq 1$ et $j \geq 1$;
- sur la marche qui décore chaque pas-face, le premier pas, et lui seul, est un pas marqué NW^* .

On peut trouver sur la figure B.7 une illustration des pas considérés pour ces marches.

Proposition B.4. *L'ensemble des structures transverses est en bijection avec l'ensemble des marches tandems T-admissibles contraintes au quart de plan. Plus préci-*

sément on a une bijection entre :

Les structures transverses ayant :

- un $\mathcal{WE}$ -type (p, q) ,
- m arêtes rouges,
- n sommets internes ;

Les marches tandems T -admissibles :

- allant de $(0, p)$ à $(q, 0)$,
- ayant $m - 1$ pas, parmi lesquels
- n pas SE.

Et alors chaque face quadrangulaire $\mathfrak{T}_q$ dans l'orientation bipolaire V -transverse associée correspond à un pas non marqué NW dans la marche tandem T -admissible. On note Ψ_T cette bijection.

Le paragraphe suivant est consacré à expliciter le fonctionnement de cette bijection Ψ_T et à donner une preuve de la correspondance.

B.5.2 Description de Ψ_T et démonstration de la Proposition B.4

Démonstration de la Proposition B.4. Par la Proposition A.3 (p.85) on sait déjà que les structures transverses sont en bijection avec les orientations bipolaires planes qui sont T -transverses. On rappelle qu'une orientation bipolaire T -transverse $\mathcal{B}_T$ est un poset plan simple $\mathcal{B}$ auquel on a ajouté des arêtes transversales selon la condition (TB). Le poset sous-jacent $\mathcal{B}$ peut-être décrit par la bijection KMSW (voir Théorème 14 et notamment son Corollaire B.1, p.112), aussi il reste à montrer que les ajouts faits aux faces internes de $\mathcal{B}$ sont bien décrits par la décoration sur les pas-faces des marches tandems T -admissibles.

Soit f une face interne de $\mathcal{B}$, de type (i, j) , il s'agit de montrer que toutes les manières d'ajouter des arêtes transversales à f en respectant (TB) sont encodées par toutes les manières d'associer au pas $(-i, j)$ correspondant, un marche w sur l'ensemble $\{W, N, NW, NW^*\}$. On décrit la construction de l'addition transverse de f à partir du chemin w :

- a. Durant toute la construction, on maintient deux sommets marqués : v_ℓ un sommet sur le bord latéral gauche de f et v_r sur son bord latéral droit. On démarre avec v_ℓ (resp. avec v_r) sur le sommet en haut de la première arête sur le bord latéral gauche de f (resp. bord latéral droit de f). Au début de la construction on ajoute une arête orientée transversale bleue, dirigée depuis v_ℓ et vers v_r , ce qui ajoute une face $\mathfrak{T}_b$ au-dessous de cette arête. On avance d'un pas sur w et on consomme donc déjà le premier pas NW^* .
- b. On parcourt le reste du chemin w jusqu'à la fin. Lorsque l'on voit un pas $(-\varepsilon_\ell, \varepsilon_r)$ parmi $\{W, N, NW\}$, on déplace le sommet marqué v_ℓ (resp. v_r) de ε_ℓ arête (resp. de ε_r arête) le long du bord latéral gauche de f (resp. le long du bord latéral droit de f) ; ensuite on ajoute une arête orientée transversale bleue, dirigée depuis v_ℓ et vers v_r . Avec cette construction on constate que les pas W correspondent aux faces $\mathfrak{T}_l$, les pas N aux faces $\mathfrak{T}_r$, et les pas NW aux faces $\mathfrak{T}_q$.
- c. À la fin de la construction on a vu $i - 1$ pas W ou NW et on a vu $j - 1$ pas N ou NW . Donc les sommets v_ℓ et v_r se trouvent bien sur les derniers sommets blancs le

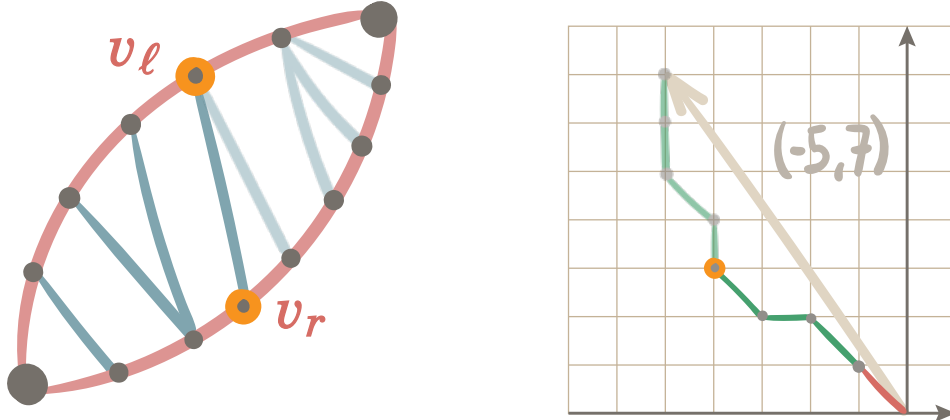


FIGURE B.8 – Un exemple d'addition transverse d'une face interne d'orientation bipolaire T-transverse à l'aide d'une marche sur $\{W, N, NW, NW^*\}$.

longs des bords latéraux gauche et droit de f . On termine donc avec une face $\mathfrak{T}_t$ au-dessus de la dernière arête ajoutée.

La face ainsi complétée respecte bien (TB). Sur les cinq types de faces des orientations bipolaires T-transverses, données à la figure A.14 (p.85), les faces $\mathfrak{T}_b$ et $\mathfrak{T}_t$ correspondent donc aux extrémités des faces rouges. On donne à la figure B.8 un exemple de complétion d'une telle face interne f à l'aide d'une marche sur $\{W, N, NW, NW^*\}$. On peut clairement revenir dans l'autre sens, par exemple en prenant les faces de $\mathcal{B}_T$ situées à l'intérieur de f du bas vers le haut ; puis en associant un pas W aux faces $\mathfrak{T}_l$, un pas N aux faces $\mathfrak{T}_r$ et un pas NW aux faces $\mathfrak{T}_q$. On a donc bien décrit une correspondance entre les additions transverses de f et les marches sur $\{W, N, NW, NW^*\}$ attachées au pas-face $(-i, j)$.

Enfin la correspondance entre les paramètres est assurée par celles de la Proposition A.3 (p.85) et de la bijection KMWS au Théorème 14 (p.61). ♦

Remarque 46. Le premier pas NW^* ne sert pas dans la construction de la bijection avec les additions transverses des orientations bipolaires T-transverses et il est à ce stade possible d'oublier ce marquage. Il nous sera toutefois utile plus tard lorsque nous considérerons des marches à petits pas et que nous oublierons les grands pas-faces $(-i, j)$ qui les portent.

B.5.3 Restriction de Ψ_T aux structures transverses triangulées

On peut également restreindre cette bijection aux seules structures transverses triangulées, c'est-à-dire les structures transverses dont toutes les faces internes sont des triangles. Pour ce faire, il suffit d'interdire le pas NW qui code pour les faces $\mathfrak{T}_q$ dans les marches tandems T-admissibles. On a donc des pas décorées par une marche

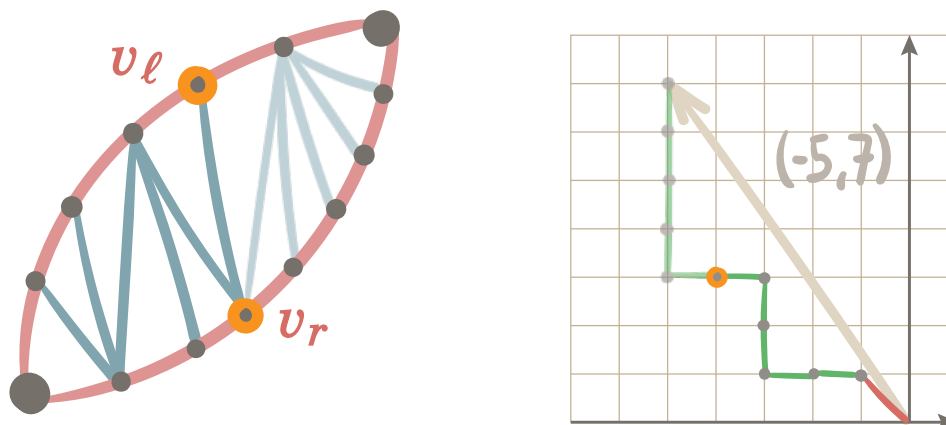


FIGURE B.9 – Un exemple d'addition transverse d'une face interne d'orientation bipolaire T-transverse triangulée à l'aide d'une marche sur $\{W, N, NW^*\}$; le pas NW est alors proscrit.

sur $\{N, W, NW^*\}$, on donne un exemple d'addition transverse dans le cas triangulé à la figure B.9.

Dans le cas triangulé, on remarque que l'ordre de construction des faces via la bijection KMSW est exactement le même ordre que l'ordre d'épluchage des structures transverses donné par É. Fusy dans [Fus09, Figure 5], en renversant l'ordre de la face la plus à gauche en l'ordre de la face la plus à droite.

Cette section nous aura permis de donner une correspondance entre les structures transverses et des marches tandems décorées, dites T-admissibles, dans le quart de plan, en passant par l'intermédiaire des orientations bipolaires T-transverses. On a également spécialisé cette bijection aux structures transverses triangulées.

Au paragraphe C.5 (p.142), on se servira de ces énoncés bijectifs pour donner des résultats de comptage exacts pour les orientations bipolaires T-transverses. Au paragraphe D.1.3 (p.163) on en tirera des résultats d'énumération asymptotique. À chaque fois, on spécialisera ces énoncés d'énumération aux structures transverses triangulées, ce qui nous permettra de retrouver le coefficient de croissance asymptotique conjecturé pour cette famille de cartes [ITF09].

B.6 Bijection des orientations polyédrales avec les marches tandems P-admissibles

Dans cette section on donne une correspondance entre les orientations polyédrales et des marches paires bimodales : les marches tandems P-admissibles. On entend par *bimodales* que ces marches fonctionnent selon deux modes : les pas autorisés ne sont pas les mêmes selon la parité de l'ordonnée courante. Pour démontrer cet énoncé bijectif, on fait usage de l'objet intermédiaire des orientations bipolaires

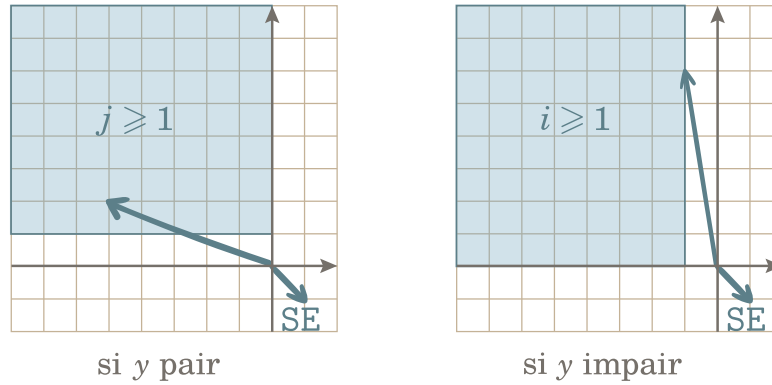


FIGURE B.10 – Les pas autorisés pour les marches tandems P-admissibles sont le pas sud-est SE et : les pas-faces $\{(-i, j), j \geq 1\}$ lorsque l'ordonnée courante y est paire; $\{(-i, j), i \geq 1\}$ lorsqu'elle est impaire.

P-admissibles auxquelles on a ramené les orientations polyédrales à la section A.4 (p.90). Comme on l'a vu à la Remarque 37 (p.111), les marches tandems induites par KMSW sont ici paires du fait que les orientations bipolaires planes associées aux orientations polyédrales sont biparties. Dans un premier temps on définit ces marches P-admissibles (paragraphe B.6.1). On donne ensuite une description et une démonstration du résultat bijectif (paragraphe B.6.2).

B.6.1 Définition des marches tandems P-admissibles et mise en bijection

Définition 47. Une *marche tandem P-admissible* est une marche tandem paire telle que tous les pas-faces de la forme $(-i, j)$ et qui commencent à la position (x, y) vérifient :

- que $j \geq 1$ si le pas-face commence avec une ordonnée y paire ;
- que $i \geq 1$ si le pas-face commence avec une ordonnée y impaire.

On peut trouver sur la figure B.10 une illustration des pas considérés pour ces marches.

Proposition B.5. *Les orientations polyédrales sont en bijection avec les marches tandems P-admissibles, contraintes au quart de plan, partant de l'origine $(0,0)$ et terminant le long de l'axe x des abscisses. Plus précisément on a une bijection entre :*

Les orientations polyédrales avec les paramètres suivants :

- n sommets internes, parmi lesquels
- a sommets rouges,
- b sommets bleus,
- et c sommets verts ;

Les marches tandems P-admissibles dans le quart de plan, allant de $(0,0)$ à l'axe des abscisses et ayant :

- une longueur de n pas,
- a pas SE commençants à un y pair,
- b pas SE commençants à un y impair,
- et c pas-faces.

On note Ψ_P cette bijection.

Le paragraphe suivant est consacré à expliciter le fonctionnement de cette bijection Ψ_P et à donner une preuve de la correspondance.

B.6.2 Description de Ψ_P et démonstration de la Proposition B.5

Démonstration de la Proposition B.5. Par la Proposition A.4 (p.91) on sait déjà que les orientations polyédrales sont en bijection avec les orientations bipolaires P-admissibles. On rappelle qu'une orientation bipolaire P-admissible $\mathcal{B}_P$ est une orientation bipolaire plane bipartie qui vérifie les deux propriétés locales (PB1) et (PB2). L'orientation bipolaire plane bipartie peut alors être décrite par la bijection KMSW (voir Théorème 14 et notamment la Remarque 37, p.111). Par ailleurs on sait par la condition (PB2) que si f est une face à pointe noire (resp. face à pointe blanche) de $\mathcal{B}_P$, de type (i, j) alors on a $i \geq 1$ (resp. $j \geq 1$). Comme les faces à pointe noire (resp. faces à pointe blanche) correspondent aux pas-faces $(-i, j)$ qui partent des ordonnées y impaires (resp. paires), cela revient bien à demander à ce $i \geq 1$ (resp. $j \geq 1$) pour ces pas-faces-ci.

Enfin la correspondance entre les paramètres est assurée par celles de la Proposition A.4 et de la bijection KMWS au Théorème 14. ♦

On a ici donné une correspondance entre les orientations polyédrales et des marches tandems P-admissibles contraintes à rester dans le quart de plan. On se servira par la suite de cette bijection pour donner des résultats d'énumération exacte, au paragraphe C.6 (p.147), et de comptage asymptotique, à la section D.2 (p.166).

B.7 Bijection des étiquetages de Schnyder avec les marches tandems S-admissibles

Le résultat principal de cette section consistera à mettre en bijection les étiquetages de Schnyder avec des marches pondérées : les marches tandems S-admissibles. À nouveau cette correspondance sera faite par le truchement des orientations bipolaires planes, ici S-transverses, introduites à la section A.5 (p.99), et de la bijection KMSW. Comme pour les orientations polyédrales, les marches tandems que nous décrivons ici sont *bimodales* : les pas autorisés ne sont pas les mêmes selon la parité de l'ordonnée courante. De même, et comme les orientations bipolaires S-transverses étaient biparties, les marches tandems S-admissibles seront ici des marches paires.

Dans un premier temps on définit ces marches P-admissibles (paragraphe B.7.1) et on énonce la bijection avec les étiquetages de Schnyder dont les deux sommets G ne sont pas isolés. On donne ensuite une description et une démonstration du résultat bijectif (paragraphe B.7.2). Enfin, dans un dernier paragraphe (B.7.3), on fait le lien entre ces marches liées aux étiquetages de Schnyder et les marches tandems W-admissibles que l'on avait introduite pour décrire les bois de Schnyder triangulés.

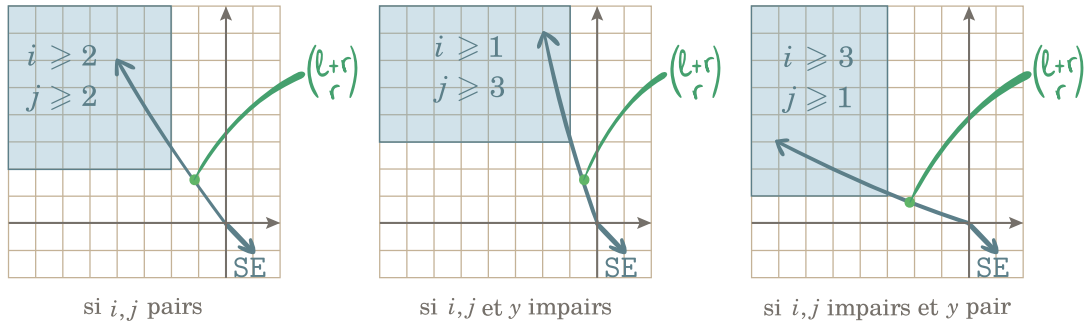


FIGURE B.11 – Les pas autorisés pour les marches tandems S-admissibles sont le pas sud-est SE et des pas-faces différents selon la parité de i, j, y . Dans le cas où i, j sont pairs (à gauche) on a $\ell = i/2 - 1, r = j/2 - 1$. Dans le cas où i, j et y sont impairs (au centre) on a $\ell = (i - 1)/2, r = (j - 3)/2$. Dans le cas où i, j sont impairs et y pair (à droite) on a $\ell = (i - 3)/2, r = (j - 1)/2$.

B.7.1 Définition des marches tandems S-admissibles et mise en bijection

Définition 48. Une marche tandem S-admissible est une marche tandem paire pondérée telle que tous les pas-faces s de la forme $s = (-i, j)$ et qui commence à la position (x, y) vérifie :

- si i, j sont pairs : qu'ils soient strictement positifs, sous la forme $i = 2\ell + 2$ et $j = 2r + 2$, et que le pas s ait alors un poids $\binom{\ell+r}{r}$;
- si i, j sont impairs et y est pair : que $i \geq 1$ et $j \geq 3$ et s'ils sont sous la forme $i = 2\ell + 1$ et $j = 2r + 3$, que le pas s ait alors un poids $\binom{\ell+r}{r}$;
- si i, j et y sont impairs : que $i \geq 3$ et $j \geq 1$ et s'ils sont sous la forme $i = 2\ell + 3$ et $j = 2r + 1$, que le pas s ait alors un poids $\binom{\ell+r}{r}$;

On peut trouver sur la figure B.11 une illustration des pas considérés pour ces marches.

Proposition B.6. L'ensemble des étiquetages de Schnyder dont les sommets externes G ne sont pas isolés est en bijection avec l'ensemble des marches tandems S-admissibles, contraintes au quart de plan, partant de $(0, 2)$ et terminant en $(2, 0)$. Plus précisément on a une bijection entre :

Les étiquetages de Schnyder dont les sommets G ne sont pas isolés et ayant les paramètres suivants :

- n faces internes,
- $a + 1$ sommets blancs,
- $b + 1$ sommets noirs ;

On note Ψ_S cette bijection.

Les marches tandems S-admissibles dans le quart de plan partant de $(0, 2)$ et terminant en $(2, 0)$ et ayant :

- $n + 2$ pas SE, parmi lesquels
- a pas SE commençants à un y pair,
- b pas SE commençants à un y impair.

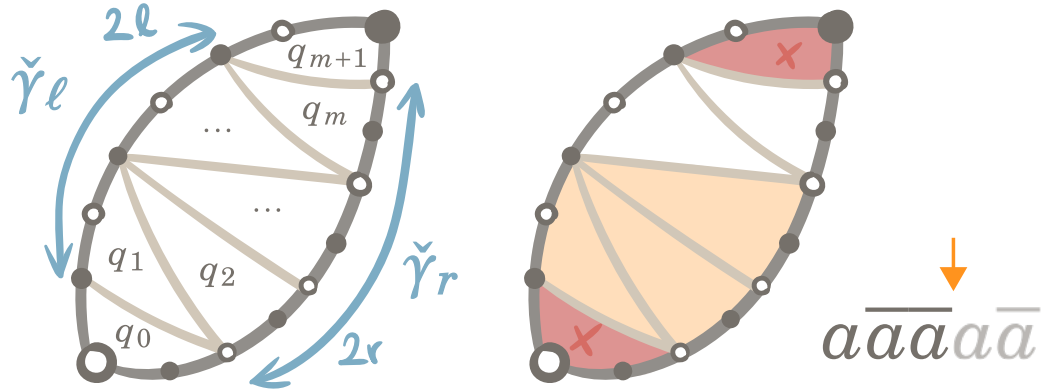


FIGURE B.12 – Un exemple du parcours des faces $q_1, \dots, q_{m+1}$ et de leur traduction sur $\{a, \bar{a}\}$. À noter les premières et dernières faces q_0 et q_{m+1} ne sont pas traduites, la position des arêtes transversales sont forcées à ces endroits-ci.

Le paragraphe suivant est consacré à expliciter le fonctionnement de cette bijection Ψ_S et à donner une preuve de la correspondance.

B.7.2 Description de Ψ_S et démonstration de la Proposition B.6

Démonstration de la Proposition B.6. Par la Proposition A.6 (p.101) on sait déjà que les étiquetages de Schnyder sont en bijection avec les orientations bipolaires S-transverses. On rappelle qu'une orientation bipolaire S-transverse $\mathcal{B}_S$ est une quadrangulation du 6-gone avec des arêtes pleines et des arêtes transversales et qui vérifie les deux propriétés locales (SB1) et (SB2). L'orientation bipolaire plane bipartite sous-jacente $\mathcal{B}_S^b$, donnée par les arêtes pleines, peut-être décrite par la bijection KMSW (voir Théorème 14 et Remarque 37, p.111). Aussi il reste à montrer que toutes les manières de remplir les faces internes de $\mathcal{B}_S^b$ avec des arêtes transversales qui respectent bien (SB2) sont bien décrites par la pondération sur les pas-faces des marches tandems S-admissibles.

Soit f une face interne de $\mathcal{B}_S^b$, de type (i, j) , et $q_0, \dots, q_{m+1}$ les quadrangles de $\mathcal{B}_S$ qui se trouvent dans f prises de bas en haut de f . On note $\check{\gamma}_\ell$ le chemin allant du premier au dernier sommet noir strictement sur le bord latéral gauche. On note $\check{\gamma}_r$ le chemin allant du premier au dernier sommet blanc strictement sur le bord latéral droit; voir figure B.12. Soient 2ℓ la longueur du chemin $\check{\gamma}_\ell$ et $2r$ celle de $\check{\gamma}_r$. On constate que si h est dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ alors q_h a soit deux arêtes le long de $\check{\gamma}_\ell$ et aucune le long de $\check{\gamma}_r$, soit l'inverse.

On construit alors un mot sur $\{a, \bar{a}\}$ ayant ℓ fois la lettre a et r fois la lettre $\bar{a}$. Pour ce faire, on parcourt $q_1, \dots, q_m$ et on associe la lettre a lorsque q_h a deux arêtes sur $\check{\gamma}_\ell$ et $\bar{a}$ lorsque q_h a deux arêtes sur $\check{\gamma}_r$; voir figure B.12. On peut clairement reconstruire les faces $q_0, \dots, q_{m+1}$ à partir d'un tel mot.

Un tel mot peut également être encodé par un entier entre 1 et $\binom{\ell+r}{r}$ ce qui justifie les poids fixés sur les marches tandems S-admissibles. Par ailleurs on remarque que le degré de f est $2\ell + 2r + 6$, aussi les faces de $\mathcal{B}_S$ sont de degré au moins 6.

Enfin la correspondance entre les paramètres est assurée par celles de la Proposition A.6 et de la bijection KMWS au Théorème 14. ♦

Maintenant que l'on a donné une preuve et une description de la bijection Ψ_S entre les étiquetages de Schnyder et les marches tandems S-admissibles, on regarde une spécialisation de cette bijection aux bois de Schnyder triangulés pour retrouver la correspondance avec les marches tandems W-admissibles donnée plus tôt.

B.7.3 Spécialisation de Ψ_S aux bois de Schnyder triangulés

On sait (voir dans le paragraphe III.6, p.41) que les bois de Schnyder triangulés sont décrits par les étiquetages de Schnyder sur les *triangulations*, c'est-à-dire quand le nombre $a+1$ de sommets blancs est minimal (ou maximal) par rapport au nombre $b+1$ de sommets noirs, à savoir $b = 2a - 2$ (ou $a = 2b - 2$). Le résultat suivant dit que la bijection Ψ_S restreinte à ces étiquetages de Schnyder-ci permet de retrouver les exactes même marches tandems W-admissibles que l'on avait données en section B.4 (p.116), à une dilatation de la grille près.

Lemme B.7. *L'ensemble $\mathcal{S}'_{a,b}$ des étiquetages de Schnyder est vide lorsque $b \geq 2a - 1$; lorsque $b = 2a - 2$ alors $\mathcal{S}'_{a,b}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{W}_{a-2}$ des bois de Schnyder triangulés.*

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on procède par analyse-synthèse. Dans un premier temps, on va détailler les propriétés que vérifient les marches tandems S-admissibles qui décrivent les éléments de $\mathcal{S}_{a,b}$. Ensuite on donnera une bijection entre ces marches et les marches tandems W-admissibles qui sont en correspondance avec les éléments de $\mathcal{W}_{a-2}$.

Analyse. On sait par la Proposition B.6 (p.125) que $\mathcal{S}_{a,b}$ est en bijection avec l'ensemble des marches tandems dans le quart de plan allant de $(0, 2)$ à $(2, 0)$ et ayant a (resp. b) pas SE qui commencent à un y pair (resp. impair). Soit π une telle marche, on énonce les propriétés que vérifie π , en particulier quand b est maximal. Pour cela on va dériver de π une marche unidimensionnelle. On donne à la figure B.13 une illustration de cette construction.

Compte tenu des pas autorisés, on sait que les deux premiers pas de π sont forcés et sont nécessairement deux pas SE. On appelle π' la marche π à laquelle on a ôté ces deux premiers pas; π commence donc en $(2, 0)$. On note maintenant $\tilde{\pi}$ la projection de π' sur l'axe y des ordonnées. Alors $\tilde{\pi}$ est une marche unidimensionnelle, positive et allant de 0 à 0.

On considère maintenant $\tilde{\pi}$ comme une marche 2D de Lukasiewicz. Les pas des $\tilde{\pi}$ sont soit des pas montants (qui correspondent aux pas-faces de π'); soit des pas descendants -1 (qui correspondent au pas SE de π'). Par la suite, on dira qu'un pas

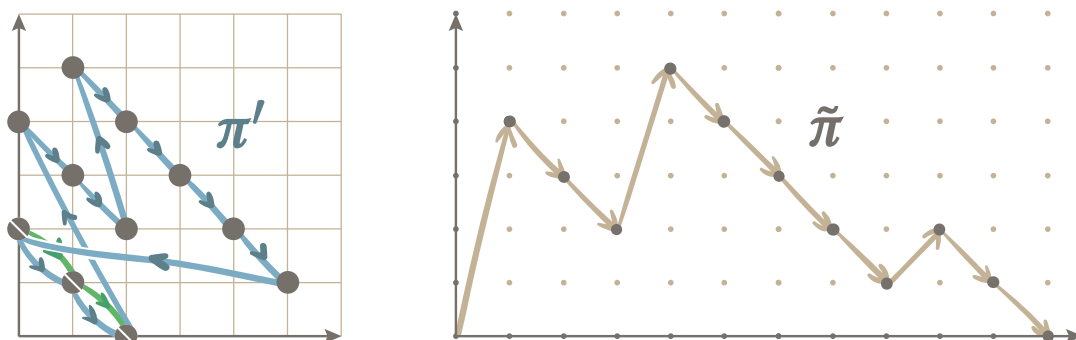


FIGURE B.13 – Construction de la marche dérivée π' (en bleu à gauche) et de la marche de Lukasiewicz $\tilde{\pi}$ (à droite) à partir de la marche tandem S-admissible π (en bleu et vert à gauche).

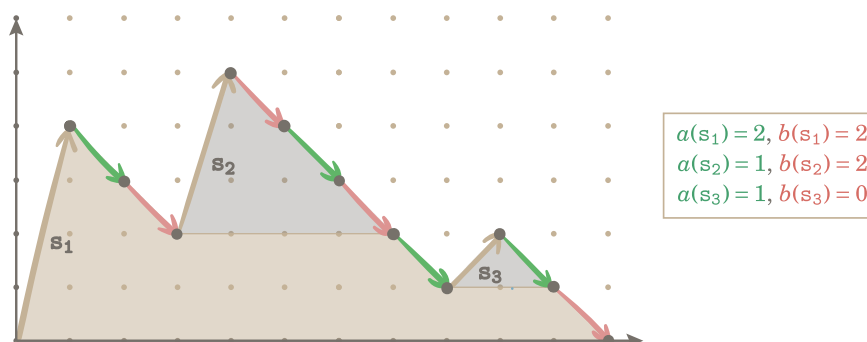


FIGURE B.14 – Illustration de la notion de pas associés et des valeurs $a(s), b(s)$ sur les pas montants. Les pas descendants pairs sont coloriés en rouge, les pas descendants impairs en vert.

de $\tilde{\pi}$ est *pair* (resp. *impair*) s'il commence à une hauteur y pair (resp. impaire). D'après les conditions sur π données à la Proposition B.6, on sait que $\tilde{\pi}$ a exactement $a - 1$ pas descendants pairs et exactement $b - 1$ pas descendants impairs. De plus, comme π est une marche tandem S-admissible, alors n'importe quel pas montant $s = +k$ de $\tilde{\pi}$ vérifie $k \geq 2$ si s est pair et $k \geq 1$ si s est impair.

Si on a un pas descendant -1 qui va de la hauteur y à la hauteur $y - 1$, on dit qu'on lui *associe* le pas montant le plus proche qui le précède, et qui couvre les hauteurs y et $y - 1$ (voir figure B.14). Si s est un pas montant, on note alors $a(s)$ (resp. $b(s)$) le nombre de pas -1 pairs (resp. impairs) associés à s . On remarque que l'on a alors toujours $|a(s) - b(s)| \leq 1$, puisque la marche termine en 0 et que toutes les ordonnées de s sont donc couvertes. On note par la suite $\delta(s) = 2a(s) - b(s)$. Clairement on a que $\delta(s) \geq 0$ et, compte tenu des règles sur les pas montants de $\tilde{\pi}$, on a que $\delta(s) = 0$ si et seulement si s est un pas $+3$ pair.

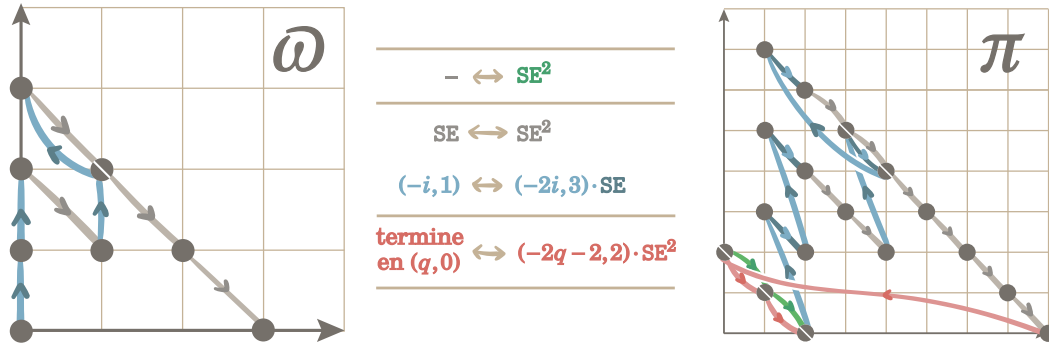


FIGURE B.15 – Correspondance entre la marche tandem W-admissible ω (à gauche) et la marche tandem S-admissible π (à droite). On rappelle les règles de la construction au centre.

Une étude de cas permet de montrer que le chemin initial π termine nécessairement par deux pas SE, eux-mêmes précédés par un pas de la forme $p_1 = (-2j - 3, 1)$ ou $p_2 = (-2j - 2, 2)$ pour un certain $j \geq 0$. Soit s_i le projeté de p_i dans $\tilde{\pi}$. On a alors : $\delta(s_1) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$ dans le premier cas et $\delta(s_2) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ dans le second cas.

Soit à présent Δ la somme des $\delta(s)$ sur l'ensemble des pas montants s de $\tilde{\pi}$. On a que $\Delta = 2(a - 1) - (b - 1)$. Alors comme δ est positif et que le dernier pas montant contribue d'au moins 1, on a que $\Delta \geq 1$. C'est-à-dire que nécessairement $b \leq 2a - 2$ et on a bien $\mathcal{S}_{a,b}$ vide lorsque $b \geq 2a - 1$. De plus, on a $\Delta = 1$ si et seulement si tous les pas montants de $\tilde{\pi}$ sont des pas pairs +3 sauf le dernier pas montant qui est un pas pair +2 qui part de l'axe horizontal.

On suppose maintenant que $b = 2a - 2$. On a montré qu'une telle marche π commence avec deux pas SE, que tous ses pas-face $(-i, j)$ commencent à une ordonnée y paire. Les pas-face vérifient également que $j = 3$; sauf le dernier pas montant où $j = 2$ et qui rejoint le point $(0, 2)$ avant de terminer π par deux pas SE. Tous les pas faces sont alors de poids 1.

Bijection entre les marches tandems W-admissibles et marches tandems S-admissibles lorsque $b = 2a - 2$. On sait par le théorème B.3 (p.116) que les éléments de $\mathcal{W}_{a-2}$ sont en bijection avec les marches tandems W-admissibles ayant $a - 2$ pas SE, commençant en $(0, 0)$ et terminant sur l'axe x des abscisses. Soit ω une telle marche, on va lui associer une marche tandem S-admissible π telle que décrite plus haut. On donne à la figure B.15 une illustration de cette construction.

On change tous les pas SE de ω en deux pas SE. On change tous les pas $(-i, 1)$ de ω en un pas $(-2i, 3)$ suivis par un pas SE. On ajoute deux pas SE au début de la marche, et on la fait commencer en $(0, 2)$. Enfin, si la marche ω termine en $(q, 0)$, on ajoute à la fin de la nouvelle marche les trois pas $(-2q - 2, 2) \cdot SE \cdot SE$. La construction est telle que tous les pas-face $(-i, 1)$ qui commençaient en (x, y) dans ω sont désormais des pas-face pairs $(-2i - 1, 3)$ qui commencent en $(2x + 2, 2y)$ dans π . Par ailleurs la marche π a bien

maintenant a pas SE qui commencent à un y pair et $2a - 2$ pas SE qui commencent à un y impair. De plus on peut bien procéder à une construction réciproque pour toute marche tandem S-admissible telle que $\Delta = 1$. Ceci conclut la démonstration. ♦

Remarque 49. Il y a une autre manière de montrer que $\mathcal{S}'_{a,b}$ est vide pour $b \geq 2a - 1$ en passant par le degré des sommets. Si C est un étiquetage de Schnyder dans $\mathcal{S}'_{a,b}$, alors tous les sommets noirs internes sont de degré au moins 3; le sommet noir externe G également; et les deux autres sommets noirs externes, R et B , sont eux de degré au moins 2. Par ailleurs, la relation d'Euler (Théorème 1, p.23) donne que le nombre d'arêtes de C est $2a + 2b - 1$. On a donc finalement que $3(b - 1) + 4 \leq 2a + 2b - 1$, c'est-à-dire que l'on a bien $b \leq 2a - 2$. Dans le cas extrémal $b = 2a - 2$ alors toutes les inégalités sont des égalités.

Si on s'intéresse à présent à un élément C de $\mathcal{S}_{a,b}$, alors dans ce cas-là le sommet noir externe G peut être de degré 2. Le cas extrémal devient $b = 2a - 1$, et tous les sommets internes noirs sont de degré 3. Il y a alors bijection simple entre $\mathcal{S}_{a,2a-1}$ et $\mathcal{S}'_{a,2a-2}$ qui consiste à retirer le sommet noir externe G (voir Remarque 35, p.102). La famille $\mathcal{S}_{a,2a-1}$ correspond alors à la famille $\mathcal{W}_{a-2}$ des bois de Schnyder triangulés à $a + 1$ sommets.

Dans cette section on a donné une correspondance entre les étiquetages de Schnyder et les marches tandems pondérées, paires et bimodales, dites S-admissibles. On a également spécialisé cette bijection aux bois de Schnyder triangulés et retrouvé le résultat de la section B.4 (p.116).

Au paragraphe C.7 (p.151), on se servira de cette bijection pour donner des résultats d'énumération exacts pour les orientations bipolaires S-transverses. À la section D.3 (p.172) on en tirera des résultats de comptage asymptotique. On spécialisera également ces résultats aux bois de Schnyder triangulés, ce qui nous permettra, entre autres, de retrouver leur bijection avec des paires non croissantes de chemins de Dyck trouvée par N. Bonichon [Bon05].

Conclusion Dans ce chapitre nous avons mis en relation six familles de cartes décorées avec des marches tandems dans le quart de plan, en nous servant des premières bijections avec des familles d'orientations bipolaires planes décorées que nous avons obtenu au chapitre A. Nous nous sommes appuyés sur la bijection KMSW et les marches tandems qui décrivent nos modèles de cartes décorées sont le plus souvent des restrictions de l'ensemble des pas autorisés par les marches tandems *classiques* de [Ken+19]. Pour les posets plans, les structures transverses, et les étiquetages de Schnyder les marches tandems que nous avons donnés sont également des marches qui sont décorées par des chemins à petits pas ou alors pondérées. Pour orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder, les marches tandems sont aussi bimodales, et l'ensemble des faces que l'on peut construire à un moment donné de la construction dépend de la couleur du sommet courant; c'est-à-dire de la parité de la hauteur courante du chemin. On a résumé dans le tableau suivant les résultats principaux de ce chapitre.

Modèle de carte décorée	Marches tandems	Énoncé bijectif
posets plans par arêtes	E-admissibles	Ψ_E Prop. B.1, sec.B.2, p.111
posets plans par sommets	V-admissibles	Ψ_V Prop. B.2, §B.3.1, p.113
bois de Schnyder triangulés	W-admissibles	Ψ_W Prop. B.3, sec.B.4, p.116
structures transverses	T-admissibles	Ψ_T Prop. B.4, §B.5.1, p.119
orientations polyédrales	P-admissibles	Ψ_P Prop. B.5, §B.6.1, p.123
étiquetages de Schnyder	S-admissibles	Ψ_S Prop. B.6, §B.7.1, p.125

Dans le chapitre suivant nous nous servirons de ces énoncés bijectifs pour en déduire des résultats d'énumération exacte. Il s'agira essentiellement d'équations fonctionnelles pour les familles de cartes considérées et de découpages de ces marches en petits pas pour obtenir des algorithmes efficaces pour calculer les premiers termes. Dans le chapitre D, les bijections que nous avons données serviront à déduire les asymptotiques de ces familles de cartes. Que ce soit pour le comptage exact ou le comptage asymptotique, le caractère bimodal des marches tandems P-admissibles et S-admissibles compliquera nettement notre étude. Nous pourrions néanmoins obtenir des résultats partiels à l'aide de méthodes *ad hoc*.





Énumération exacte des différents modèles de cartes décorées

Sommaire

C.1 Une équation maîtresse pour les marches tandems	135
C.2 Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes	136
C.2.1 Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par arêtes	136
C.2.2 Dédution d'une bijection entre les posets plans comptés par arêtes et des marches à petits pas	136
C.3 Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre de sommets	139
C.3.1 Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par leur nombre de sommets	139
C.3.2 Lien avec les permutations planes	139
C.4 Énumération exacte des bois de Schnyder triangulés	140
C.5 Énumération exacte des structures transverses	142
C.5.1 Application de l'équation maîtresse aux structures transverses	142
C.5.2 Bijection des structures transverses avec des marches à petits pas	144
C.5.3 Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les structures transverses	146
C.6 Énumération exacte des orientations polyédrales	147
C.6.1 Bijection des orientations polyédrales avec des marches à petits pas	147
C.6.2 Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les orientations polyédrales	149
C.7 Énumération exacte des étiquetages de Schnyder	151
C.7.1 Bijection des étiquetages de Schnyder avec des marches à petits pas	151

C.7.2	Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les étiquetages de Schnyder	152
C.7.3	Raffinements, et comptage des polyèdres en coin rigides	154

Introduction On souhaite traduire les bijections obtenues au chapitre précédents sous forme de résultats énumératifs. En particulier, on veut donner une équation fonctionnelle pour décrire les modèles de cartes qu'on étudie et fournir des récurrences qui permettent de calculer efficacement les premiers termes.

On se sert des descriptions sous forme de marches tandems à grands pas données au chapitre B pour déduire des équations fonctionnelles sur les séries formelles induites par nos familles combinatoires. Pour cela, on donne une équation générique, l'équation *maîtresse*, adaptée aux marches tandems décorées et que l'on spécialise ensuite pour chaque famille. Pour les posets plans comptés par arêtes, il nous est d'ailleurs possible de transformer l'équation fonctionnelle induite à l'aide de changement de variable pour la ramener à une équation fonctionnelle de marches à petits pas dans le quart de plan.

Afin d'obtenir des récurrences pour calculer les premiers termes, on ramène les marches tandems à grands pas à des marches à petits pas, toujours contraintes à rester dans le quart de plan. À chaque fois, on propose un découpage des pas-faces en petits pas, et les marches font alors intervenir des motifs exclus dans les séquences de pas. On prend soin de décrire systématiquement les séquences de pas successifs autorisés à l'aide d'automates finis (voir les figures C.5, C.7 et C.9), et les marches bimodales induisent alors des schémas compliqués sous forme d'automates produits. En effet, les marches tandems bimodales qui sont en relation avec les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder doivent tenir compte de l'ordonnée courante. Cette condition supplémentaire se traduit alors comme une contrainte orthogonale à celles déjà induites par le découpage en petits pas. Les décorations binomiales, quant à elles, sont traduites en décorations par des chemins bilatères, comme cela avait été déjà avancé au chapitre B.

Dans la section C.1, on donne quelques outils supplémentaires pour étudier les marches pondérées et décorées que l'on avait introduites au chapitre précédent. À la section C.2, on spécialise l'équation maîtresse, et on en déduit une reformulation de l'énumération des posets plans par arêtes sous forme de marches dans le quart de plan, sans motif exclu. À la section C.3, la spécialisation de l'équation maîtresse permet cette fois de montrer que les posets plans comptés par sommets sont décrits par la même série que les permutations planes, introduites dans [BB07]. Dans la section C.4, on donne une nouvelle preuve de la bijection entre les bois de Schnyder triangulés et les paires de chemins de Dyck (due à N. Bonichon [Bon05]), qui passe cette fois par leur description sous forme de marches tandems W-admissibles. À la section C.5, on spécialise l'équation fonctionnelle aux structures transverses et on donne une description sous forme de petits pas à motifs exclus ; on en déduit des

algorithmes pour calculer les premiers termes, de même complexité que les meilleurs connus [TFI09 ; Tak14 ; Rea12]. Enfin dans les sections C.6 et C.7, on donne un découpage en marches à petits pas à motifs exclus pour les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder ; on en déduit alors des récurrences pour calculer les premiers termes.

C.1 Une équation maîtresse pour les marches tandems

Dans cette section on introduit quelques outils qui nous serviront tout au long de ce chapitre. On donne également une équation fonctionnelle générique, que l'on appelle *équation maîtresse*, et qui décrit l'ensemble des marches tandems dont nous avons parlé jusqu'ici.

En complément de la Définition 38 (p.111), si ω est une application de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{R}$, on dit qu'une marche tandem est ω -pondérée lorsque ses pas-face $(-i, j)$ ont chacun un poids $\omega(i, j)$. Le ω -poids d'une telle marche est le produit des poids de ses pas-faces, et si M est un ensemble fini de marches, le ω -nombre de marches dans M est la somme des ω -poids de chacune des marches de M .

Maintenant notons $F_a^\omega(x, y)$ la série génératrice d'une marche tandem ω -pondérée, qui démarre en $(0, a)$ et qui est contrainte à rester dans le quart de plan. La variable t de la série génératrice $F_a^\omega(x, y)$ tient compte du nombre de pas de la marche ; la variable u de son nombre de pas SE ; les variables x et y , quant à elles, désignent la position courante dans le plan. On peut effectuer une décomposition de $F_a^\omega(x, y)$ selon le dernier pas de la marche ; on obtient l'équation suivante, dite *équation maîtresse*, dans l'anneau des séries formelles en t et y et ayant leurs coefficients dans les séries de Laurent en $\bar{x} = 1/x$, ces coefficients étant également polynomiaux en u :

$$F_a^\omega(x, y) = y^a + tu \frac{x}{y} (F_a^\omega(x, y) - F_a^\omega(x, 0)) + t \sum_{i, j \geq 0} \omega(i, j) \frac{y^j}{x^i} \left(F_a^\omega(x, y) - \sum_{k=0}^{i-1} x^k [x^k] F_a^\omega(x, y) \right). \quad (\text{C.1})$$

Dans l'équation précédente, le premier terme y^a sert de cas de base à la décomposition, alors que le second terme traite le cas d'un pas SE (déplacement de x/y) en interdisant de commencer un tel pas lorsque l'on se trouve sur l'axe x des abscisses ; le dernier terme traite des pas-faces. En notant $W_k(\bar{x}, y) = \sum_{i \geq k, j \geq 0} \omega(i, j) \frac{y^j}{x^i}$, on peut réécrire l'équation maîtresse que l'on vient de donner sous la forme suivante :

$$F_a^\omega(x, y) = y^a + tu \frac{x}{y} (F_a^\omega(x, y) - F_a^\omega(x, 0)) + t W_0(\bar{x}, y) F_a^\omega(x, y) - t \sum_{k \geq 0} W_{k+1}(\bar{x}, y) x^k [x^k] F_a^\omega(x, y). \quad (\text{C.2})$$

Nous donnerons les spécialisations de cette équation maîtresse pour les posets plans comptés par arêtes (équation (C.3), p.136) et par sommets (équation (C.9), p.139) ainsi que pour les structures transverses (équation (C.13), p.143). On s'abstiendra

de donner des spécialisations pour les orientations polyédrales ou les étiquetages de Schnyder, les équations induites par (C.1) étant alors plus compliquées et sans doute difficilement exploitables. Au paragraphe C.2.2 (p.136), on reformule le dénombrement des posets plans comptés par arêtes simplement à l'aide de manipulations algébriques sur l'équation maîtresse. Au paragraphe C.3.2, on se sert de l'équation maîtresse induite pour montrer que les posets plans comptés par sommets et les permutations planes sont comptées par les mêmes séries.

C.2 Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes

Afin d'obtenir une description fine de la combinatoire des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes, on spécialise l'équation maîtresse aux marches tandems E-admissibles. On souhaite pouvoir calculer les premiers termes de la suite $(e_n)_{n \geq 0}$ de manière efficace, pour cela, on ramène l'énumération des posets plans par arêtes à celle de marches simples, à petits pas, contraintes à rester dans le quart de plan.

C.2.1 Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par arêtes

On donne ici une première spécialisation de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par arêtes. On sait que les marches tandems E-admissibles correspondent à des marches tandems ω_E -pondérée avec $\omega_E(i, j) = \mathbf{1}_{i, j \geq 1}$. Aussi, si on note $E_a(x, y) = F_a^{\omega_E}(x, y)$ leur série génératrice, alors, en sommant sur i, j, k et en posant $u = 1$, l'équation maîtresse (C.1) devient :

$$E_a(x, y) = y^a + t \frac{x}{y} (E_a(x, y) - E_a(x, 0)) + t \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}} \frac{y}{1 - y} (E_a(x, y) - E_a(1, y)). \quad (C.3)$$

On sait par le Corollaire B.1 (p.112) que le coefficient $[t^n x^b] E_a(x, 0)$ donne le nombre de posets plans de type extérieur (a, b) et ayant $n + 1$ arêtes. On se sert de ce résultat au paragraphe suivant pour démontrer une correspondance avec des marches à petits pas.

C.2.2 Dédution d'une bijection entre les posets plans comptés par arêtes et des marches à petits pas

Dans ce paragraphe, on se sert de manipulations algébriques, semblables à celles réalisées en [Bou+18, Section 5.2], pour ramener l'équation maîtresse (C.3) à une équation fonctionnelle, plus simple, de marches contraintes. Cela nous permet de ramener les posets plans comptés par arêtes à des marches à petits pas contraintes à rester dans le quart de plan. On peut alors en déduire un algorithme en temps polynomial simple pour donner les premiers termes de la série génératrice associée.

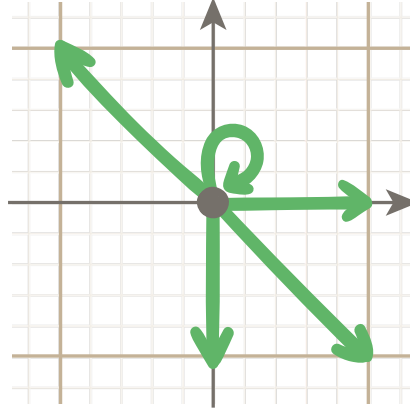


FIGURE C.1 – L'ensemble des petits pas qui permettent de décrire les posets plans comptés par arêtes.

Proposition C.1. *Pour n un entier strictement positif, le nombre e_n de posets plans ayant n arêtes est égal au nombre d'excursions dans le quart de plan, de longueur $n-1$, sur l'ensemble des pas $\{0, E, S, NW, SE\}$. On décrit à la figure C.1 les pas autorisés.*

Démonstration. On sait que e_n compte le nombre de posets plans ayant n arêtes. On peut les encapsuler en une famille de posets plans de type extérieur donné. En effet, en ajoutant, à la gauche d'un tel poset plan, un chemin de longueur 2 reliant la source $\mathcal{S}$ au puits $\mathcal{N}$, on a que pour $n \geq 2$, e_n compte également le nombre de posets plans ayant $n+2$ arêtes et ayant un bord latéral gauche de longueur 2 (voir figure C.2a). On a donc $e_n = [t^{n+1}]E_1(1,0)$ pour tout $n \geq 2$. On réalise à présent un changement de variable pour faire apparaître une marche à petits pas. On note $Q(u,v)$ la série donnée par le changement de variable $\{x = 1+u, \bar{y} = 1+\bar{v}\}$ appliqué à $E_1(x,y)$. L'équation maîtresse (C.3) pour $E_1(x,y)$ s'écrit alors :

$$Q(u,v) = 1 + t(1+u+\bar{v}+u\bar{v}+\bar{u}v)Q(u,v) - t(1+u)(1+\bar{v})Q(u,0) - t\bar{u}vQ(0,v). \quad (C.4)$$

On se rend compte que cette équation ressemble à l'équation fonctionnelle sur la série génératrice $\hat{Q}(u,v)$ des marches contraintes à rester dans le quart de plan sur l'ensemble des pas $\{0, E, S, NW, SE\}$ et qui partent de l'origine. En effet l'équation sur $\hat{Q}$ s'écrit :

$$\hat{Q}(u,v) = 1 + t(1+u+\bar{v}+u\bar{v}+\bar{u}v)\hat{Q}(u,v) - t(1+u)\bar{v}\hat{Q}(u,0) - t\bar{u}v\hat{Q}(0,v). \quad (C.5)$$

Pour deviner la relation entre Q et $\hat{Q}$ on procède à une extraction des coefficients dans les deux équations fonctionnelles. On devine alors que la relation entre les deux séries semble être :

$$Q(u,v) = \frac{v}{1+v} + t(1+u) - t^2 + t^2(1+v)\hat{Q}(u,v). \quad (C.6)$$

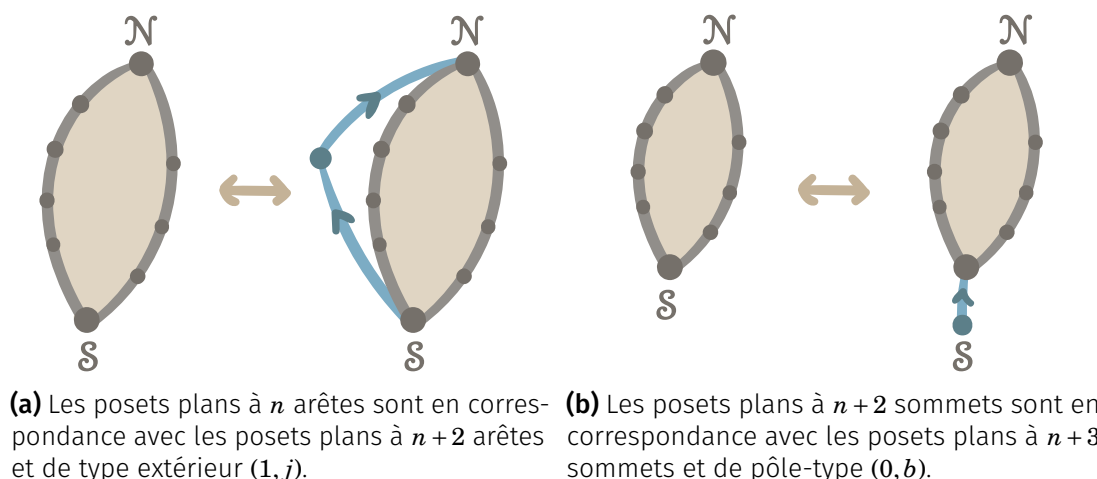


FIGURE C.2 – Encapsulation de posets plans.

Pour le vérifier on fait la substitution $\{Q(u,v) = \frac{v}{1+v} + t(1+u) - t^2 + t^2(1+v)\hat{Q}(u,v)\}$ dans (C.4) et on obtient bien l'équation (C.5), à un coefficient $t^2(1+y)$ près. Par conséquent on déduit de (C.6) que $[t^n]Q(0,0) = [t^{n-2}]\hat{Q}(0,0)$ pour $n \geq 3$. Comme on avait $E_1(1,0) = Q(0,0)$ de par le changement de variable, cela donne pour $n \geq 2$ que :

$$e_n = [t^{n+1}]E_1(1,0) = [t^{n+1}]Q(0,0) = [t^{n-1}]\hat{Q}(0,0), \quad (\text{C.7})$$

qui compte bien le nombre d'excursions dans le quart de plan, de longueur $n-1$, sur l'ensemble des pas $\{0, E, S, NW, SE\}$. Il reste ensuite à faire la vérification pour $n=1$, or on a bien $e_1 = 1 = [t^0]\hat{Q}(0,0)$; ce qui achève la démonstration. ♦

Remarque 50. On verra au paragraphe D.1.1 que les séries $E_a(x,y)$ qui comptent les posets plans par leur nombre d'arêtes ne sont pas holonomes. Toutefois il reste possible de se servir de la décomposition sous forme de marches à petits pas pour en déduire une récurrence qui permet de calculer les premiers termes de la série des $e_1, \dots, e_n$ en temps polynomial. Le calcul coûte alors $O(n^4)$ opérations sur les bits et utilise $O(n^3)$ bits d'espace. Les premiers termes sont alors :

$$e_1, \dots, e_{11}, \dots = 1, 1, 1, 2, 5, 12, 32, 93, 279, 872, 2830, \dots \quad (\text{C.8})$$

Dans cette section on a donné une spécialisation de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par arêtes et on a mis en relation cette famille de cartes avec des marches à petits pas, ce qui permet par ailleurs de donner un algorithme en temps polynomial pour trouver les premiers termes. Si la correspondance avec des marches à petits pas a ici été réalisée par une méthode purement algébrique, il pourrait être intéressant de trouver une preuve bijective de la Proposition C.1. Au paragraphe D.1.1, la décomposition sous forme de poset plan nous servira cette fois-ci à déduire un équivalent asymptotique de la suite $(e_n)_{n \geq 0}$.

C.3 Énumération exacte des posets plans comptés par leur nombre de sommets

On spécialise l'équation maîtresse aux marches tandems V-admissibles ce qui nous permet de donner les premiers termes de la série qui compte le nombre de posets plans à $n+2$ sommets. On se rend compte que ces premiers termes comptent également le nombre de permutations planes sur un ensemble à n éléments et on montre que ces deux familles sont bel et bien comptées par les mêmes séries. On ne donnera pas ici de description sous forme de marches à petits pas, puisqu'une telle description est déjà donnée par la décoration sur les pas-faces des marches tandems V-admissibles.

C.3.1 Application de l'équation maîtresse aux posets plans comptés par leur nombre de sommets

Les marches tandems V-admissibles correspondent à des marches tandems ω_V -pondérées avec $\omega_V(i, j) = \binom{i+j}{i}$. On note $V_a(x, y) = F_a^{\omega_V}(x, y)$ leur série génératrice. On calcule le coefficient $W_k(\bar{x}, y)$ à l'aide de la Remarque 25 (p.68), on obtient que $W_k(\bar{x}, y) = \frac{1}{1-(\bar{x}+y)} \frac{\bar{x}^k}{(1-y)^k}$ dans l'anneau des séries formelles en $\bar{x}, y$. Ainsi, l'équation maîtresse (C.1) s'écrit :

$$V_a(x, y) = y^a + t \frac{x}{y} (V_a(x, y) - V_a(x, 0)) + \frac{t}{1-y} \frac{1}{x - \frac{1}{1-y}} \left(x V_a(x, y) - \frac{1}{1-y} V_a\left(\frac{1}{1-y}, y\right) \right). \quad (C.9)$$

On sait par la Proposition B.2 que le coefficient $[t^n x^b] V_a(x, 0)$ donne le nombre de posets plans de $\mathcal{V}_{n+1}$ (c'est-à-dire avec $n+2$ sommets) et ayant un pôle-type (a, b) . On peut donc utiliser cette équation fonctionnelle pour calculer les premiers termes de la série des posets plans comptés par leur nombre de sommets :

$$v_1, \dots, v_{11}, \dots = 1, 1, 2, 6, 23, 104, 530, 2958, 17734, 112657, 750726, 5207910, \dots \quad (C.10)$$

On constate que cette suite d'entiers semble déjà être comptée par d'autres objets combinatoires (voir [A117106](#)). On montre que c'est bien le cas au paragraphe suivant.

C.3.2 Lien avec les permutations planes

Dans ce paragraphe on montre que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$, qui compte les posets plans par leur nombre de sommets, compte également les permutations planes. Cette classe de permutations a été introduite par M. Bousquet-Mélou et S. Butler dans [BB07]. Elles ont récemment été étudiées et comptées par M. Bouvel, V. Guerrini, A. Rechnitzer et S. Rinaldi dans [Bou+18]. On montre à l'aide de l'équation fonctionnelle (C.9), que les permutations planes et nos poset plan sont comptés par les mêmes séries.

Proposition C.2. *Soit n un entier positif ou nul, alors il y a autant de posets plans avec $n+2$ sommets que de permutations planes sur un ensemble à n éléments.*

Démonstration. Quitte à ajouter une source de degré 1, uniquement reliée à l'ancienne source (voir figure C.2b), on a que v_n compte le nombre de posets plans ayant $n + 3$ sommets et un pôle-type de la forme $(0, b)$ avec b quelconque. Alors d'après les calculs du paragraphe C.3.1, on a que $v_n = [t^n]V_0(1, 0)$. Posons à présent $R(u, v) = v(V_0(v, 1 - \bar{u}) - 1)$, de telle sorte que l'on ait $V_0(1, 0) = 1 + R(1, 1)$. Par ailleurs, si l'on effectue le changement de variable $\{y = 1 - \bar{u}, x = v\}$, alors on a :

$$R(u, v) = x(V_0(x, y) - 1) \quad ; \quad \frac{1}{1-y} V_0\left(\frac{1}{1-y}, y\right) = u V_0(u, 1 - \bar{u}) = R(u, u) + u. \quad (\text{C.11})$$

On réécrit à présent l'équation maîtresse (C.9) pour V_0 , à la lumière de cette réécriture et à l'aide de R et du changement de variable $\{y = 1 - \bar{u}, x = v\}$. On obtient le calcul :

$$\begin{aligned} R(u, v) &= x(V_0(x, y) - 1) \\ &= x(y^0 - 1) + t \frac{x}{y} (xV_0(x, y) - xV_0(x, 0)) + \frac{tx}{1-y} \frac{1}{x - \frac{1}{1-y}} \left(xV_0(x, y) - \frac{1}{1-y} V_0\left(\frac{1}{1-y}, y\right) \right) \\ &= \frac{tuv}{u-1} (R(u, v) + v - R(1, v) - v) + \frac{tuv}{v-u} (R(u, v) + v - R(u, u) - u) \\ &= tuv + \frac{tuv}{1-u} (R(1, v) - R(u, v)) + \frac{tuv}{v-u} (R(u, v) - R(u, u)). \end{aligned}$$

Or l'égalité donnée par la dernière ligne de calcul correspond exactement à celle qui se trouve à [Bou+18, équation (2)]. D'après cette équation-ci on a que $[t^n]R(1, 1)$ compte le nombre de permutations planes sur un ensemble à n éléments. Or $v_n = [t^n]V_0(1, 0)$ et $V_0(1, 0) = 1 + R(1, 1)$. Ce qui achève la démonstration. ♦

Le chapitre E (p.181) sera consacré à donner une construction bijective pour mettre directement en relation les permutations planes avec les posets plans.

C.4 Énumération exacte des bois de Schnyder triangulés

On a rappelé au paragraphe III.6 (p.41) que les bois de Schnyder triangulés pouvaient être vus comme un cas particulier d'étiquetages de Schnyder sur des triangulations. Au paragraphe B.7.3 (p.127) du chapitre B on a d'ailleurs montré que les orientations bipolaires S-transverses étaient en effet une généralisation des orientations bipolaires W-admissibles que nous avons introduites pour décrire les bois de Schnyder triangulés. Aussi, l'énumération exacte des bois de Schnyder triangulés peut désormais très bien se déduire de celle que nous réaliserons à la section C.7 pour les étiquetages de Schnyder, comme nous le verrons au paragraphe C.7.3 (p.154). Dans cette section on s'attarde plutôt à redémontrer un résultat spécifique aux bois de Schnyder triangulés : leur bijection avec les paires de chemins de Dyck qui avait été mis en évidence par N. Bonichon dans [Bon05].

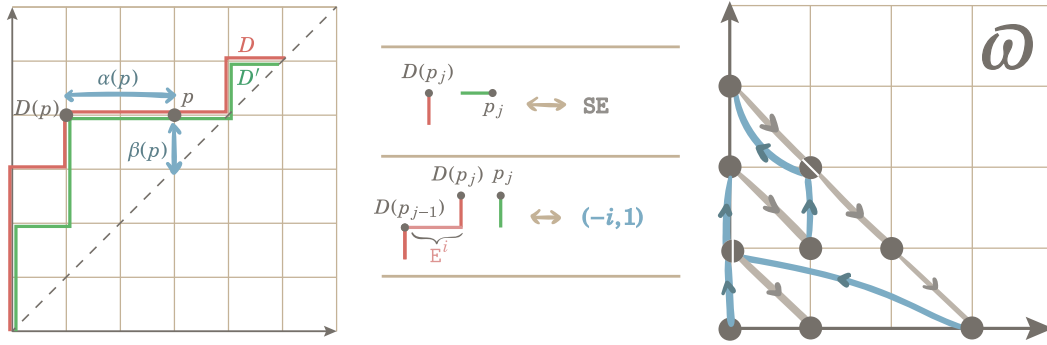


FIGURE C.3 – À gauche la paire de chemins de Dyck sans croisement (D, D') et à droite la marche ω correspondante. On met au centre les règles de traduction qui permettent de passer de l'un à l'autre.

Soit n un entier positif, alors un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est une marche sur l'ensemble des pas $\{E, N\}$, qui part de l'origine $(0,0)$, qui termine en (n,n) et qui est contrainte à rester dans la région $\{y \geq x\}$. Une paire (D, D') de chemin de Dyck de longueur $2n$ est dite *sans croisement* lorsque pour tout y dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ l'unique pas N de D qui démarre à la hauteur y est à gauche (au sens large) de l'unique pas N de D' qui démarre à la hauteur y . On donne à présent une nouvelle démonstration de la bijection entre les bois de Schnyder triangulés et les paires de chemins de Dyck :

Proposition C.3. *L'ensemble $\mathcal{W}_n$ des bois de Schnyder triangulés à $n+3$ sommets est en bijection avec l'ensemble des paires de chemins de Dyck sans croisement et de longueur $2n$.*

Démonstration. On sait par la Proposition B.3 (p.116) que l'ensemble $\mathcal{W}_n$ des bois de Schnyder triangulés à $n+3$ sommets est en bijection avec l'ensemble des marches tandems W-admissibles contraintes à rester dans le quart de plan, qui commencent en $(0,0)$, qui terminent sur l'axe x , et qui ont n pas SE. Il s'agit donc de montrer que cette classe de marches tandems W-admissibles est en bijection avec l'ensemble des paires de chemins de Dyck.

Soit (D, D') une paire de chemins de Dyck de longueur $2n$, on construit une marche ω dans le plan de la manière suivante (on donne une illustration à la figure C.3) :

- Si $p = (x, y)$ est un point qui se trouve sur le chemin D' (celui des deux qui se trouve à droite), alors on note $\alpha(p)$ la distance horizontale entre p et l'unique pas N de D qui termine à la hauteur y . On note $D(p)$ ce pas.
- De la même manière on note $\beta(p)$ la distance verticale entre p et la diagonale $\{x = y\}$.
- Soient $p_1, \dots, p_{2n}$ les points de D' pris dans l'ordre, on définit l'image w de (D, D') comme étant la marche qui visite successivement les points $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_{2n}, \beta_{2n})$.

Alors la marche ω commence bien en $(0,0)$ et termine bien sur l'axe des x des abscisses puisque $\beta(p_{2n}) = 0$ (D' étant chemin de Dyck). Par définition ω reste dans le quart de plan puisque les paramètres $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont positifs. Enfin, chaque pas de ω correspond à un point p_j de D' , et il apparaît alors deux types de pas. Les premiers sont ceux qui correspondent au cas où p_j succède à un pas E de D' : ils correspondent naturellement à un pas SE puisque $D(p_j) = D(p_{j-1})$. Les seconds sont ceux où p_j succèdent à un pas N, auquel cas on lit entre $D(p_{j-1})$ et $D(p_j)$ un certain nombre i , éventuellement nul, de pas E : ces points donnent alors un pas $(-i, 1)$ dans ω (voir figure C.3). On a bien montré que ω était une marche tandem W-admissible de la forme souhaitée.

Enfin, il est clairement possible de construire une paire de chemins de Dyck à partir d'une telle marche tandem W-admissible. Pour cela on utilise la correspondance entre les pas de ω et la typologie des points de D' que l'on vient de donner et que l'on a décrit à la figure C.3. ♦

Dans cette section on a donné une nouvelle démonstration de la correspondance entre les paires de chemins de Dyck et les bois de Schnyder triangulés. À la section C.7 (p.154), on verra comment spécialiser les résultats énumératifs sur les étiquetages de Schnyder aux bois de Schnyder triangulés.

C.5 Énumération exacte des structures transverses

Dans un premier temps on donne une spécialisation de l'équation maîtresse aux structures transverses (paragraphe C.5.1). On souhaite ensuite obtenir un algorithme pour calculer les premiers termes de la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ qui compte le nombre de structures transverses selon leur nombre de sommets internes. Pour cela on propose au paragraphe C.5.2 (p.144) un découpage en petits pas des marches tandems T-admissibles que nous avons décrit à la section B.5 (p.119). On montre ensuite (paragraphe C.5.3, p.146) comment en déduire un algorithme de calcul des premiers termes.

C.5.1 Application de l'équation maîtresse aux structures transverses

Les marches tandems T-admissibles sont des marches tandems décorées par une marche sur $\{W, N, NW, NW^*\}$, où seul le premier pas est un pas NW^* , et tels que les pas-faces $(-i, j)$ vérifient que $i, j \geq 1$. Pour attribuer un poids numérique aux pas-faces $(-i, j)$ on compte donc le nombre de marches entre $(-1, 1)$ et $(-i, j)$ sur l'ensemble de pas $\{W, N, NW\}$. Il y a $\binom{i+j-2-r}{\alpha, \beta, r}$ telles marches ayant r pas NW ; où $\alpha = i - 1 - r$ est le nombre de pas W et $\beta = j - i - r$ est le nombre de pas N. Les marches tandems T-admissibles correspondent donc à des marches tandems ω_T -pondérées avec $\omega_T(i, j) = \sum_{r \geq 0} \frac{(i+j-2-r)!}{(i-1-r)!(j-1-r)!r!} v^r$; et où v est la variable qui tient compte du nombre r de pas non-marqués NW, c'est-à-dire du nombre de faces carrées $\mathfrak{T}_q$ (Proposition B.4, p.119).

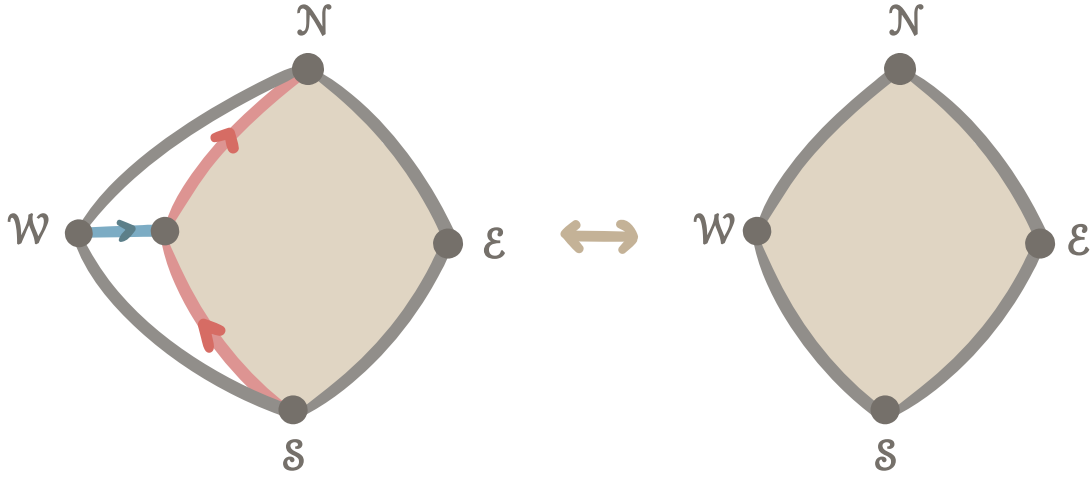


FIGURE C.4 – Les structures transverses à $n + 5$ sommets et de $\mathcal{WE}$ -type $(1, b)$, avec $b \geq 1$, sont en bijection avec les structures transverses à $n + 4$ sommets.

Le coefficient $\omega_T(i, j)$ est donc le coefficient $[\bar{x}^i y^j] \frac{\bar{x}y}{1 - \bar{x} - v\bar{x}y - y}$ qui compte les marches sur $\{W, N, NW\}$, commençant par un pas NW^* , et avec un marqueur v sur le pas NW . Par conséquent on a

$$W_0(\bar{x}, y) = W_1(\bar{x}, y) = \frac{\bar{x}y}{1 - \bar{x} - v\bar{x}y - y} \quad ; \quad W_{k+1}(\bar{x}, y) = \frac{y}{1 - y} \frac{1}{x - \frac{1+vy}{1-y}} \left(\frac{\bar{x}(1+vy)}{1-y} \right)^k. \quad (C.12)$$

On peut donc réécrire l'équation maîtresse (C.1) sous la forme :

$$T_a(x, y) = y^a + tu \frac{x}{y} (T_a(x, y) - T_a(x, 0)) + \frac{ty}{1-y} \frac{1}{x - \frac{1+vy}{1-y}} \left(T_a(x, y) - T_a\left(\frac{1+vy}{1-y}, y\right) \right). \quad (C.13)$$

On sait par la Proposition B.4 (p.119) que le coefficient $[u^n t^m] T_1(x, 0)$ donne le $\omega_T(v)$ -nombre de structures transverses dans $\mathcal{T}_n$ (c'est-à-dire avec $n+4$ sommets) et ayant $m-1$ arêtes rouges et un $\mathcal{WE}$ -type $(1, j)$ avec $j \geq 1$. Comme le degré du sommet W est 3, on peut le supprimer et nommer W le seul sommet interne auquel était adjacent l'ancien sommet W (voir figure C.4). Alors $[u^n t^m] T_1(x, 0)$ permet également de compter le $\omega_T(v)$ -nombre de structures transverses dans $\mathcal{T}_n$ ayant $m-1$ arêtes rouges et un $\mathcal{WE}$ -type quelconque. Ici comme le poids ω_T dépend de v , on notera $t_n(v)$ le $\omega_T(v)$ -nombre de marches tandems de longueur n , que l'on appellera également v -nombre de structures transverses à $n+4$ sommets. On a que $t_n(0)$ compte le nombre de structures transverses triangulées à $n+4$ sommets; et que $t_n(1)$ compte le nombre de structures transverses génériques à $n+4$ sommets.

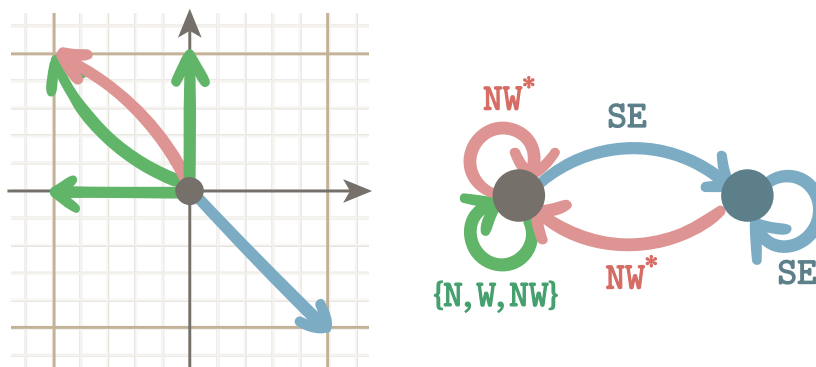


FIGURE C.5 – À gauche l'ensemble des pas autorisés pour les T -marches tandems, à droite l'automate qui décrit les successions de pas permises.

C.5.2 Bijection des structures transverses avec des marches à petits pas

On verra au paragraphe D.1.3 (p.163) que la série T_1 n'est pas holonome en la variable u (avec $t = 1$). Toutefois, et comme nous l'avons fait au paragraphe C.2 pour les posets plans comptés par arêtes, on peut améliorer le temps de calcul des premiers termes en se ramenant à des marches à petits pas dans le quart de plan. Cette fois-ci on interdit certaines séquences de pas consécutifs. Dans un premier temps on introduit ces marches à petits pas puis on donne l'énoncé bijectif avec les structures transverses.

Définition 51. On appelle *T-marche tandem* une marche sur l'ensemble des petits pas $\{SE, W, N, NW, NW^*\}$, telle qu'aucun pas $\{N, W, NW\}$ ne succède à un pas SE . On décrit à la figure C.5 les pas successifs autorisés.

Proposition C.4. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ des structures transverses ayant $n + 4$ sommets est en bijection avec l'ensemble des T -marches tandems contraintes à rester dans le quart de plan, qui commencent en $(0, 1)$, qui terminent en $(1, 0)$, et qui font apparaître exactement $n + 2$ pas SE .

Démonstration. Pour compter les structures transverses, on peut très bien choisir d'ajouter les chemins SWN et $SE N$ au poset rouge de la structure transverse et à l'encapsuler dans un rectangle pour obtenir une structure transverse de $\mathcal{WE}$ -type $(1, 1)$ (voir figure C.6). De telle sorte que $t_n(v)$ est le v -nombre de structures transverses à $n + 6$ sommets et de $\mathcal{WE}$ -type $(1, 1)$.

Définissons $\mathcal{T}_n(i, j)$ comme l'ensemble des T -marches tandems contraintes à rester dans le quart de plan, qui commencent en $(0, 1)$, qui terminent en (i, j) , et qui font apparaître exactement n pas SE . On pondère chaque pas NW par un poids v . Ces marches décrivent en fait les marches tandems T -admissibles où l'on aurait transformé chaque pas-face muni de sa décoration en une marche sur $\{W, N, NW, NW^*\}$ avec les mêmes origine

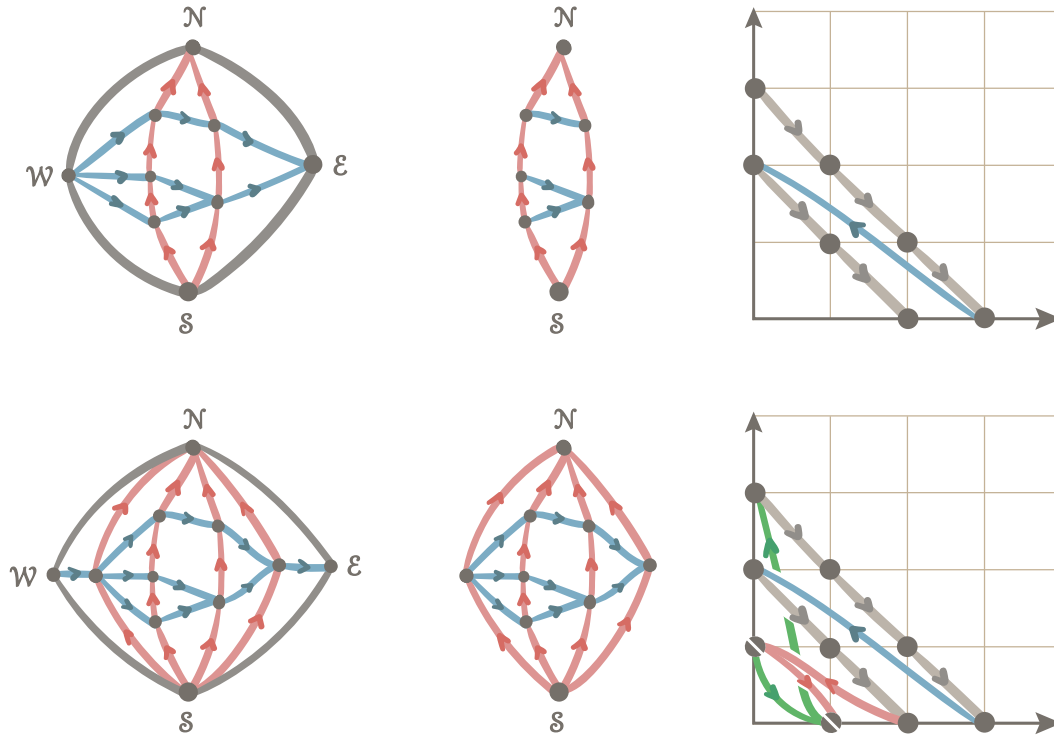


FIGURE C.6 – En haut à gauche la structure transverse initiale, que l'on encapsule (en bas à gauche) en une structure transverse de $\mathcal{WE}$ -type $(1,1)$; au centre leurs orientations bipolaires T-transverses correspondantes, à droite les marches tandems T-admissibles associées. On a noté en vert (resp. en rouge) le chemin concaténé au début (resp. à la fin) de la marche initiale. On a omis les décorations sur les pas-faces.

et fin que le pas-face d'origine ; de telle sorte que $t_n(v)$ est le v -nombre de marches pondérées qui se trouvent dans $\mathcal{T}_{n+2}(1,0)$. ♦

C.5.3 Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les structures transverses

Corollaire C.5. Soient n, i, j trois entiers et $t_n^{\setminus}(i, j)$ et $t_n^{\setminus}(i, j)$ les coefficients donnés par la double récurrence suivante :

$$\begin{cases} t_n^{\setminus}(i, j) = t_n^{\setminus}(i+1, j-1) + (1+v)t_n^{\setminus}(i+1, j-1) + t_n^{\setminus}(i+1, j) + t_n^{\setminus}(i, j-1) \\ t_n^{\setminus}(i, j) = t_{n-1}^{\setminus}(i-1, j+1) + t_{n-1}^{\setminus}(i-1, j+1), \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

où les conditions au bord sont données par $t_n^{\setminus}(i, j) = 0$ et $t_n^{\setminus}(i, j) = 0$ pour $n \leq 0$, pour $i < 0$, pour $i > n$, ou pour $j < 0$; excepté pour $t_0^{\setminus}(0, 1) = 1$. Alors pour tout entier n strictement positif on a que $t_n(v) = t_{n+2}^{\setminus}(1, 0)$.

Démonstration. On reprend les notations de la preuve de la Proposition C.4. Soient maintenant $n \geq 1$ et $i, j \geq 0$, on note $t_n^{\setminus}(i, j)$ (resp. $t_n^{\setminus}(i, j)$) le v -nombre de marches qui se trouvent dans $\mathcal{T}_n(i, j)$ et qui se terminent (resp. qui ne se terminent pas) par un pas SE. Alors en s'appuyant sur la figure C.5, on peut réaliser une décomposition selon le dernier pas de ces deux classes de marches pour montrer que $t_n^{\setminus}(i, j)$ et $t_n^{\setminus}(i, j)$ vérifient bien la récurrence définie en (C.14). Par ailleurs une marche dans $\mathcal{T}_{n+2}(1, 0)$ s'achève sur l'axe x des abscisses et se termine donc nécessairement par un pas SE, d'où $t_n(v) = t_{n+2}^{\setminus}(1, 0)$. ♦

Remarque 52. On peut se servir de cette récurrence pour calculer les premiers termes de la série des $t_n(v)$ en temps polynomial. Dans le cas des structures transverses triangulées ($v = 0$) et dans le cas général ($v = 1$), le calcul coûte $O(n^4)$ opérations sur les bits et utilise $O(n^3)$ bits d'espace. Ceci donne donc un algorithme aussi performant que ceux déjà connus, que ce soit pour le cas triangulé [TFI09]^a, que pour le cas général [Tak14]. On a également un algorithme pour le cas triangulé donné dans [Rea12]. Les premiers termes sont alors :

$$t_1(0), \dots, t_{10}(0), \dots = 1, 1, 2, 6, 24, 116, 642, 3938, 26194, 186042, \dots \quad (\text{C.15})$$

$$t_1(1), \dots, t_{10}(1), \dots = 1, 1, 2, 6, 25, 128, 758, 5014, 36194, 280433, \dots \quad (\text{C.16})$$

Dans le cas général, il est possible de calculer les premiers termes en $t_1(v), \dots, t_n(v)$ en utilisant $O(n^5)$ opérations sur les bits et prenant $O(n^4)$ bits d'espace. Cela donne alors une alternative à l'algorithme donné dans [Tak14]. Les premiers termes sont :

$$1, 2, 6, 24 + v, 116 + 12v, 642 + 114v + 2v^2, 3938 + 1028v + 48v^2, \dots \quad (\text{C.17})$$

a. Les auteurs donnent un algorithme de codage qui peut alors se traduire en récurrence pour compter les premiers termes.

Dans cette section on a donné une équation maîtresse pour les structures transverses et on a donné un découpage des marches tandems T-admissibles en marches à petits pas qui interdisent certains motifs de pas consécutifs. Enfin, on s'est servi de cette description sous forme de petits pas pour donner des algorithmes en temps polynomial pour calculer la suite $(t_n(v))_{n \geq 0}$, on a aussi des spécialisations plus efficaces dans les cas $v = 0$ (cas triangulé) et $v = 1$. Au paragraphe sous-section D.1.3, on donnera un équivalent asymptotique de t_n et on démontrera, en particulier, une conjecture due à [ITF09], sur le coefficient de croissance de cette suite.

C.6 Énumération exacte des orientations polyédrales

Comme pour les modèles précédents il est possible d'écrire une spécialisation de l'équation maîtresse (C.5.1). On se permet ici de l'épargner au lecteur puisque la spécialisation est relativement longue dans le cas bimodal. On souhaite pouvoir calculer efficacement les premiers termes de la série des p_n qui compte le nombre d'orientations polyédrales à n sommets internes. Pour cela, on donne une description des marches tandems P-admissibles sous formes de marches à petits pas, avec des motifs interdits (paragraphe C.6.1). On tire de cette description une récurrence qui permet alors de calculer les premiers termes de la série (paragraphe C.7.2).

L'idée est ici d'appliquer une méthode relativement similaire à celle que l'on a donnée pour les structures transverses ; cette fois-ci on fait également une distinction de cas selon l'ordonnée courante y . On modifie également la récurrence pour compter le nombre $p_{a,b,c}$ d'orientations polyédrales ayant $a + 1$ sommets rouges, $b + 1$ sommets bleus et $c + 1$ sommets verts.

C.6.1 Bijection des orientations polyédrales avec des marches à petits pas

Le but ici est de découper les marches tandems P-admissibles sous forme de marches à petits pas. Pour découper les pas-faces, on commence par un premier pas marqué qui sert à se déplacer assez loin de l'origine, et on poursuit par des (doubles) pas W_2, N_2 pour arriver au point souhaité. Comme les pas-faces des orientations polyédrales n'étaient pas pondérés, on ne laisse pas de liberté et on impose que les pas W_2 précèdent les pas N_2 . Dans la section suivante (voir p.151), on aura une construction similaire où les pas W_2, N_2 n'auront pas d'ordre imposé.

Définition 53. On appelle *P-marche tandem* une marche sur l'ensemble des petits pas $\{SE, W_2, N_2, NW^*, W_2^*, N_2^*\}$ et telle que :

- Le pas SE et le pas marqué NW^* peuvent suivre n'importe quel pas ; un pas marqué W_2^* (resp. N_2^*) peut suivre n'importe quel pas mais doit commencer à une ordonnée y paire (resp. impaire).
- Un pas non marqué W_2 peut seulement succéder à n'importe quel pas marqué ou à un autre pas W_2 .

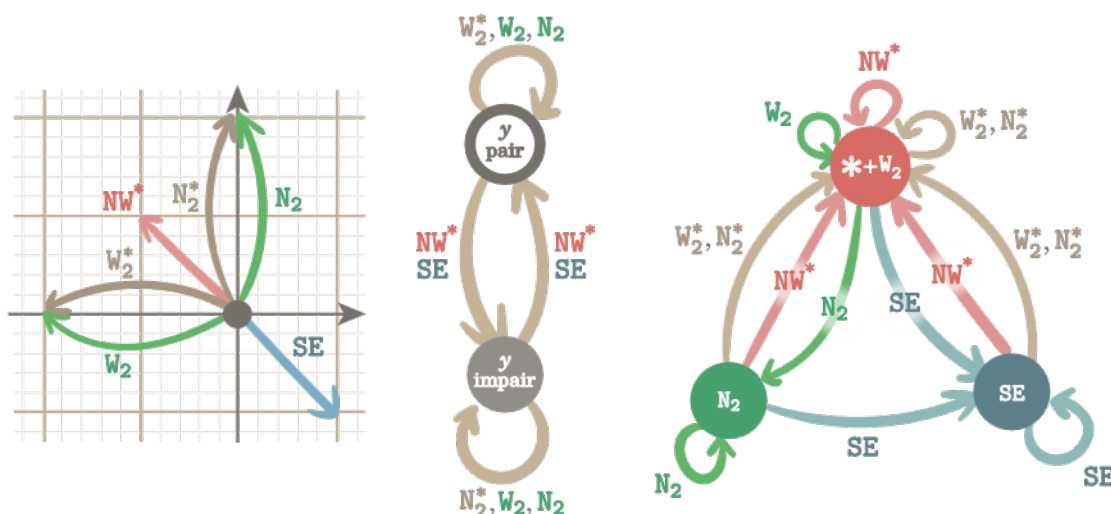


FIGURE C.7 – À gauche l'ensemble des pas autorisés pour les P -marches tandems. Les successions de pas permises sont données par le produit direct des deux automates qui se trouvent au centre et à droite.

- Un pas non marqué N_2 peut seulement succéder à n'importe quel pas marqué, à un pas W_2 ou à un autre pas N_2 .

On décrit à la figure C.7 les pas successifs autorisés.

Proposition C.6. *L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des orientations polyédrales ayant n sommets internes est en bijection avec l'ensemble des P -marches tandems contraintes à rester dans le quart de plan qui commencent en $(0,0)$, qui terminent sur l'axe x des abscisses, et qui font apparaître exactement n pas qui sont soit marqués soit SE.*

Démonstration. Pour rappel l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des orientations polyédrales est en bijection (Proposition B.5, p.123) avec l'ensemble des marches tandems P -admissibles de longueur n qui commencent à l'origine et qui se terminent sur l'axe x des abscisses. On va donner ici une décomposition de ces marches pondérées P -admissibles en P -marches tandems, qui ne sont pas pondérées. On procède comme suit :

- Les pas-faces qui étaient de la forme $(-2\ell - 1, 2r + 1)$ sont envoyés sur des séquences qui commencent par un pas marqué NW^* , suivi de ℓ pas W_2 , puis de r par N_2 .
- Les pas-faces qui étaient de la forme $(-2\ell, 2r + 2)$ et qui commençaient à une ordonnée y paire, sont envoyés sur des séquences qui commencent par un pas marqué N_2^* , suivi de ℓ pas W_2 , puis de r pas N_2 .
- Les pas-faces qui étaient de la forme $(-2\ell - 2, 2r)$ et qui commençaient à une ordonnée y impaire, sont envoyés sur des séquences qui commencent par un pas marqué W_2^* , suivi de ℓ pas W_2 , puis de r pas N_2 .

La correspondance que l'on vient de décrire est illustrée à la figure C.8. On observe que les séquences correspondantes aux pas-faces commencent avec un unique pas marqué. On peut donc reconstruire la marche tandem P -admissible à partir de la décomposition sous forme de petits pas. Sa longueur correspond alors au nombre de pas qui sont marqués ou qui sont des pas SE. On constate que les pas que l'on a construits sont alors bel et bien des P -marches tandems. ♦

C.6.2 Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les orientations polyédrales

On utilise ici le découpage sous forme de P -marches tandems que l'on vient de donner pour en déduire une récurrence qui permet de calculer les premiers termes de la suite p_n .

Corollaire C.7. Soient n, i, j trois entiers et $p_n^{\searrow}(i, j), p_n^{\swarrow}(i, j)$ et $p_n^{\uparrow}(i, j)$ les coefficients données par la double récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n^{\searrow}(i, j) = p_{n-1}^{\searrow}(i-1, j+1) + p_{n-1}^{\swarrow}(i-1, j+1) + p_{n-1}^{\uparrow}(i-1, j+1) \\ p_n^{\searrow}(i, j) = \left(p_{n-1}^{\searrow}(i+1, j-1) + p_{n-1}^{\swarrow}(i+1, j-1) + p_{n-1}^{\uparrow}(i+1, j-1) \right) \\ \quad + \left(p_{n-1}^{\searrow}(i+2, j) + p_{n-1}^{\swarrow}(i+2, j) + p_{n-1}^{\uparrow}(i+2, j) \right) \\ \quad + p_n^{\searrow}(i+2, j) \quad \text{si } j \text{ est pair,} \\ p_n^{\swarrow}(i, j) = \left(p_{n-1}^{\searrow}(i+1, j-1) + p_{n-1}^{\swarrow}(i+1, j-1) + p_{n-1}^{\uparrow}(i+1, j-1) \right) \\ \quad + \left(p_{n-1}^{\searrow}(i, j-2) + p_{n-1}^{\swarrow}(i, j-2) + p_{n-1}^{\uparrow}(i, j-2) \right) \\ \quad + p_n^{\swarrow}(i+2, j) \quad \text{si } j \text{ est impair,} \\ p_n^{\uparrow}(i, j) = p_n^{\searrow}(i, j-2) + p_n^{\swarrow}(i, j-2), \end{array} \right. \quad (C.18)$$

où les conditions au bord sont données par $p_n^{\searrow}(i, j) = 0, p_n^{\swarrow}(i, j) = 0$ et $p_n^{\uparrow}(i, j) = 0$ pour $n \leq 0$, pour $i < 0$, pour $i > n$, ou pour $j < 0$; excepté pour le premier terme $p_0^{\searrow}(0, 0) = 1$. Alors pour tout entier $n \geq 1$ on a que $p_n = \sum_{i \geq 0} p_{n-1}^{\searrow}(i, 0)$; où, pour rappel, p_n compte le nombre d'orientations polyédrales à n sommets internes.

Démonstration. On se sert de la décomposition en petits pas donnée juste avant à la Proposition C.6. Soit $n \geq 1$ un entier, alors on note $p_n^{\searrow}(i, j)$ (resp. $p_n^{\swarrow}(i, j)$; resp. $p_n^{\uparrow}(i, j)$) le nombre de P -marches tandems qui commencent en $(0, 0)$, terminent en (i, j) , ont n pas qui sont soit marqués soit SE et qui se terminent par un pas SE (resp. par un pas non marqué ou par w_2 ; resp. par un pas N_2). On procède à une décomposition par le dernier pas de ces trois familles de marche que l'on vient d'introduire.

Compte tenu des règles issues de la Définition 53, on obtient bien les équations (C.18). La condition selon laquelle les termes de bord sont tous nuls excepté pour $p_0^{\searrow}(0, 0) = 1$, assurent que le chemin compté démarre bien avec un pas marqué. Enfin, comme une P -marche tandem qui s'achève sur l'axe x des abscisses se termine nécessairement par un pas SE, on a bien $p_n = \sum_{i \geq 0} p_{n-1}^{\searrow}(i, 0)$. ♦

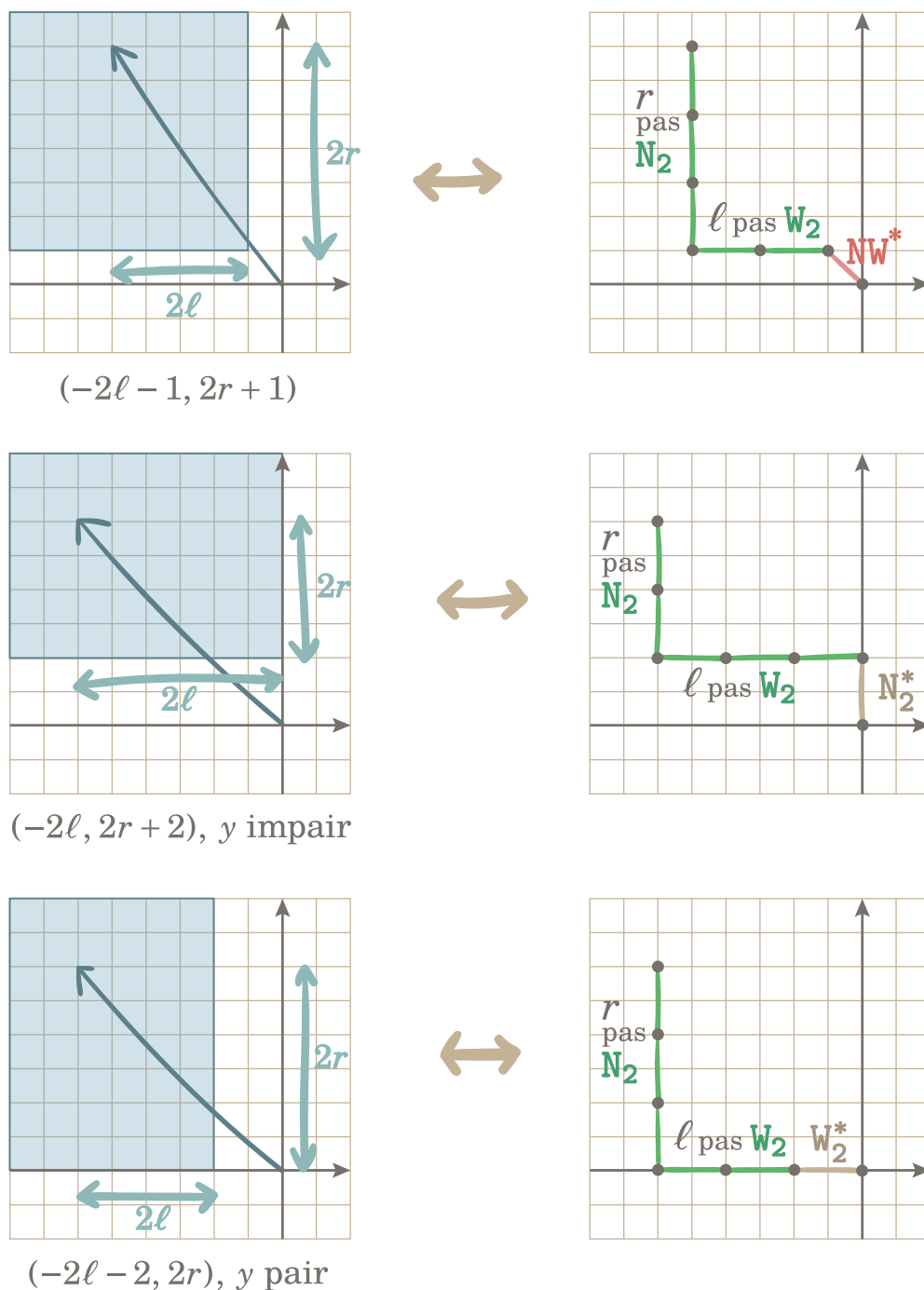


FIGURE C.8 – Correspondance entre les pas-faces des marches tandems P -admissibles et les séquences de petits pas des P -marches tandems. On distingue les cas selon la forme du pas et la hauteur y de départ du pas. La distinction de cas pour les marches tandems P -admissibles faite ici est présentée différemment qu'à la figure B.10 (p.123).

Remarque 54. On peut se servir de cette récurrence pour calculer les premiers termes de la série des p_n en temps polynomial. Les premiers termes sont alors :

$$\sum_{n \geq 4} p_n t^n = t^3 + 3t^5 + 4t^6 + 15t^7 + 39t^8 + 122t^9 + 375t^{10} + 1212t^{11} + 3980t^{12} + O(t^{13}). \quad (C.19)$$

Remarque 55. On peut aussi raffiner le Corollaire C.7 à $\mathcal{P}_{a,b,c}$, pour prendre en compte le nombre de sommets qui sont rouges, bleus ou verts. En effet, on sait que le nombre de sommets bleus (resp. de sommets rouges) correspondent au nombre de passages à un j pair (resp. impair) dans l'équation (C.18). Il s'agirait alors de multiplier par une variable u (resp. par une variable v) le terme de droite, dans le cas pair (resp. impair) de la définition de $p_n^\setminus$ en (C.18). On aurait alors $p_{a,b,c}$ par la formule $\sum_{a+b+c=n} p_{a,b,c} u^a v^b w^c = \sum_{i \geq 0} p_{n-1}^\setminus(i, 0)$. Les premiers termes de la série sont alors :

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c \geq 1} p_{a,b,c} u^a v^b w^c t^{a+b+c} &= uvwt^3 + (u^2v^2w + uv^2w^2 + u^2vw^2)t^5 + 4u^2v^2w^2t^6 \\ &+ (u^3v^3w + 4u^3v^2w^2 + 4u^2v^3w^2 + u^3vw^3 + 4u^2v^2w^3 + uv^3w^3)t^7 + O(t^8) \end{aligned} \quad (C.20)$$

Dans cette section on a donné une description des orientations polyédrales sous forme de P -marches tandems, des marches à petits pas qui interdisent certaines successions de pas. On s'en est servi pour fournir un algorithme en temps polynomial pour calculer les premiers termes des suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(p_{a,b,c})_{a,b,c \geq 0}$. Dans le prochain chapitre, à la section D.2 (p.166), on calculera la limite $\lim p_n^{1/n}$ et on conjecturera un équivalent asymptotique pour la suite des p_n .

C.7 Énumération exacte des étiquetages de Schnyder

Comme pour les orientations polyédrales, il est possible de spécialiser l'équation maîtresse (C.5.1) aux marches tandems S-admissibles, ce que nous ne présentons pas ici. On souhaite pouvoir calculer les premiers termes des suites liées aux étiquetages de Schnyder. Comme pour les modèles étudiés précédemment, on donne dans un premier temps (paragraphe C.7.1) un découpage des marches tandems en marches à petits pas, où on interdit certaines successions de pas. On obtient alors un algorithme pour calculer les premiers termes de la suite s'_n (paragraphe C.7.2). Enfin, au paragraphe C.7.3, on modifie ces résultats de d'énumération pour calculer les suites des s_n (étiquetages de Schnyder génériques), des $s_{a,b}$ (qui comptent selon le nombre de sommets noirs et blancs), et des $\tilde{s}_n$ (qui comptent les polyèdres en coin rigides).

C.7.1 Bijection des étiquetages de Schnyder avec des marches à petits pas

On donne ici un découpage des marches tandems S-admissibles sous forme de marches à petits pas. Pour découper les pas-faces, l'idée consiste à donner un premier

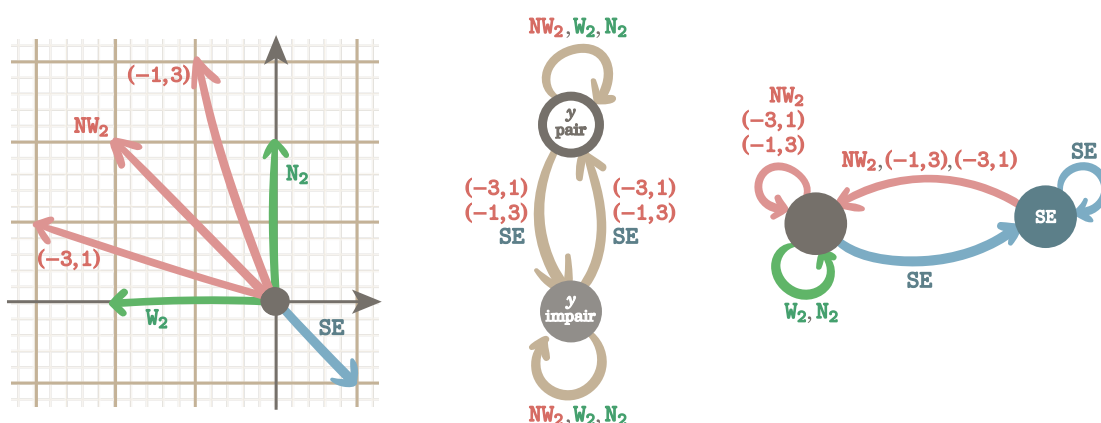


FIGURE C.9 – À droite l'ensemble des pas autorisés pour les S -marches tandems, les successions de pas permises sont données par le produit direct des deux automates qui se trouvent au centre et à droite.

pas (moralelement marqué) qui est ensuite suivi d'une marche bilatère. Le nombre de marches bilatères correspondant alors à la pondération donnée sur le pas-face dans la marche S -admissible. On peut voir ça comme un analogue des P -marches tandems où cette fois-ci les pas W n'apparaissent pas nécessairement avant tous les pas N .

Définition 56. On appelle S -marche tandem une marche sur l'ensemble des petits pas $\{SE, NW_2, (-3, 1), (-1, 3), W_2, N_2\}$ et telle que : tout pas $(-1, 3)$ (resp. pas $(-3, 1)$) commence à une ordonnée y paire (resp. impaire); telle qu'aucun pas W_2 ou N_2 ne suit un pas SE . On décrit à la figure C.9 les pas successifs autorisés.

Proposition C.8. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des étiquetages de Schnyder ayant n faces internes est en bijection avec l'ensemble S -marches tandems contraintes à rester dans le quart de plan, qui commencent en $(0, 2)$, qui terminent en $(2, 0)$, et qui font apparaître exactement $n + 2$ pas SE .

Démonstration. D'après la Proposition B.6 (p.125) on a que s'_n compte le nombre de marches tandems S -admissibles allant de $(0, 2)$ à $(2, 0)$ et faisant apparaître $n + 2$ pas SE . On peut identifier ces marches aux S -marches tandems. En effet le poids sur les pas-faces des marches tandems S -admissibles correspond exactement au nombre de manières de découper un tel pas en une séquence qui commence par un pas dans $\{NW_2, (-3, 1), (-1, 3)\}$ et qui est suivi par une séquence sur $\{W_2, N_2\}$. On donne un exemple de cette correspondance à la figure C.10. ♦

C.7.2 Exhibition d'une récurrence et des premiers termes pour les étiquetages de Schnyder

On se sert à présent du découpage sous forme de marches à petits pas que l'on vient de donner pour en déduire une récurrence qui permet de calculer les premiers

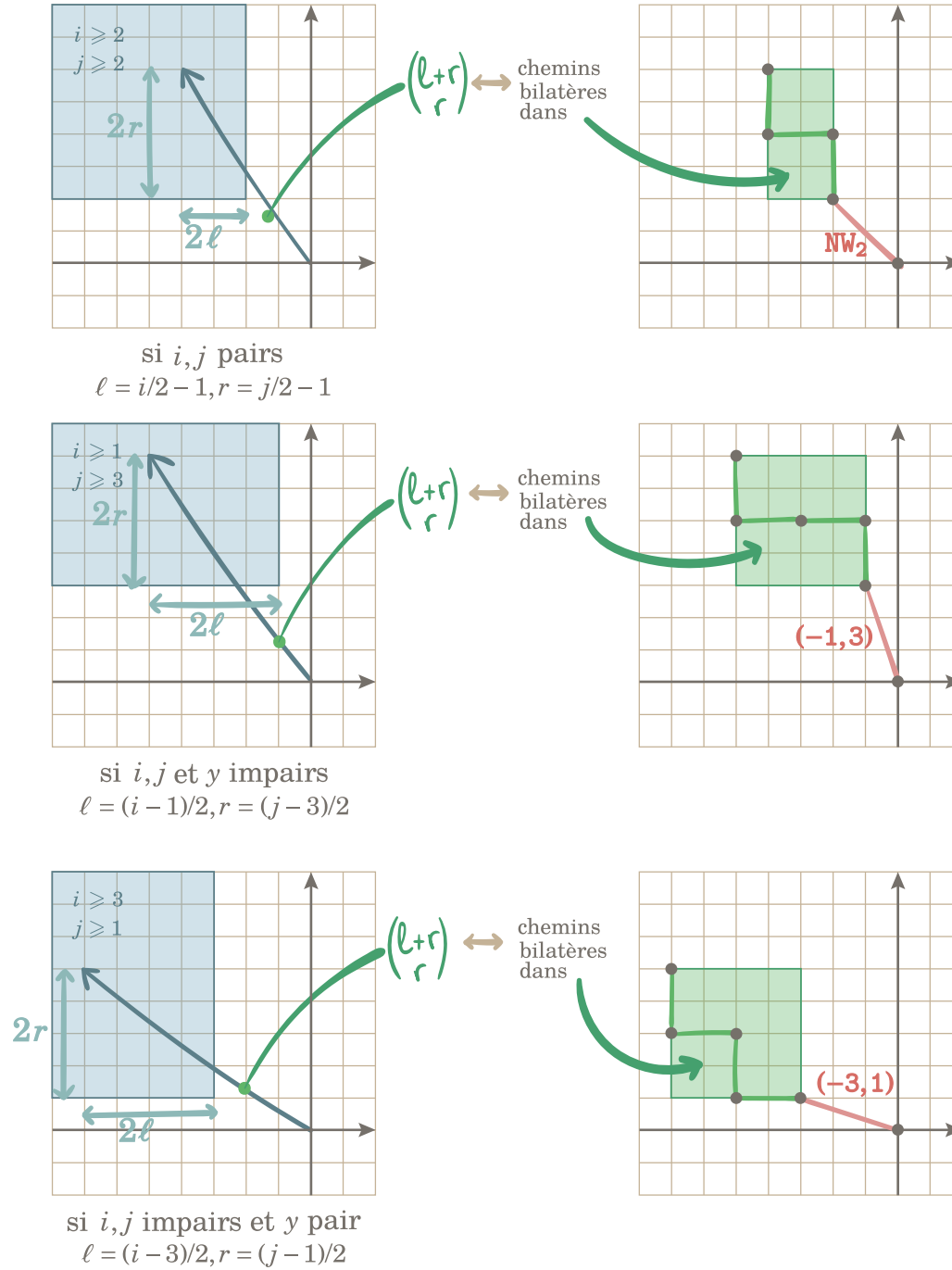


FIGURE C.10 – Correspondance entre les pas-faces des marches tandems S -admissibles et les séquences de petits pas des S -marches tandems.

termes de la suite des étiquetages de Schnyder dont les sommets G ne sont pas isolés. On a le résultat suivant :

Corollaire C.9. Soient n, i, j trois entiers et $s_n^{\setminus}(i, j)$ et $s_n^{\setminus}(i, j)$ les coefficients données par la double récurrence suivante :

$$\begin{cases} s_n^{\setminus}(i, j) = s_{n-1}^{\setminus}(i-1, j+1) + s_{n-1}^{\setminus}(i-1, j+1) \\ s_n^{\setminus}(i, j) = \left(s_n^{\setminus}(i+2, j-2) + s_n^{\setminus}(i+2, j-2) \right) + \left(s_n^{\setminus}(i+1, j-3) + s_n^{\setminus}(i+1, j-3) \right) \\ \quad + \left(s_n^{\setminus}(i+2, j) + s_n^{\setminus}(i, j-2) \right) \quad \text{si } j \text{ est impair,} \\ s_n^{\setminus}(i, j) = \left(s_n^{\setminus}(i+2, j-2) + s_n^{\setminus}(i+2, j-2) \right) + \left(s_n^{\setminus}(i+3, j-1) + s_n^{\setminus}(i+3, j-1) \right) \\ \quad + \left(s_n^{\setminus}(i+2, j) + s_n^{\setminus}(i, j-2) \right) \quad \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

Et où les conditions au bord sont données par $s_n^{\setminus}(i, j) = 0$ et $s_n^{\setminus}(i, j) = 0$ pour $n \leq 0$, pour $i < 0$, pour $i > n$, ou pour $j < 0$; excepté pour le premier terme $s_0^{\setminus}(0, 2) = 1$. Alors pour tout entier $n \geq 4$ on a que $s'_n = s_{n+2}^{\setminus}(2, 0)$; où, pour rappel, s'_n compte le nombre d'étiquetages de Schnyder à n faces internes et dont les deux sommets externes G ne sont pas isolés. On retrouve le nombre d'étiquetages de Schnyder à n faces internes avec la relation $s_n = s'_n + 2s'_{n-1} + s'_{n-2}$ (voir Remarque 35).

Démonstration. On utilise le résultat donné juste au-dessus, à la Proposition C.8. Soit n un entier strictement positif et soit $s_n^{\setminus}(i, j)$ (resp. $s_n^{\setminus}(i, j)$) le nombre de S -marches tandems dans le quart de plan, qui commence en $(0, 2)$, qui se termine en (i, j) , qui a n pas SE, et qui se termine par un pas SE (resp. qui ne se termine pas par un pas SE). Alors on peut faire une décomposition selon le dernier pas pour ces deux ensembles de marches et on trouve bien les récurrences données en (C.21).

Enfin, on observe qu'une marche tandem S -admissible qui termine sur l'axe x des abscisses se termine nécessairement par un pas SE, on a donc bien que s'_n est égal à $s_{n+2}^{\setminus}(2, 0)$. ♦

Remarque 57. On peut se servir de cette récurrence pour calculer les premiers termes de la série des s_n en temps polynomial. Le calcul coûte $O(n^3)$ additions sur des entiers qui sont de taille $O(n)$. Les premiers termes sont alors :

$$\sum_{n \geq 2} s_n t^n = 3t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 6t^5 + 14t^6 + 36t^7 + 102t^8 + 306t^9 + 972t^{10} + 3216t^{11} + O(t^{12}). \quad (\text{C.22})$$

C.7.3 Raffinements, et comptage des polyèdres en coin rigides

Dans ce paragraphe on explique comment modifier la récurrence précédente pour calculer d'autres suites liées aux étiquetages de Schnyder. En particulier on explique comment donner les premiers termes du nombre $\tilde{s}_n$ de polyèdres en coin rigides ayant $n + 3$ flats.

Remarque 58. Les récurrences du Corollaire C.9 peuvent être raffinées afin de prendre en compte le nombre de sommets noirs et de sommets blancs. En effet, le nombre de sommets noirs (resp. de sommets blancs) correspond au nombre de passages à un j pair (resp. impair) dans l'équation (C.21). Il s'agirait alors de multiplier par une variable u (resp. par une variable v) le terme de droite, dans le cas pair (resp. impair) de la définition de $s_n^\setminus$ en (C.21). On obtient alors un raffinement de la récurrence qui permet de donner les termes de $\mathcal{S}_{a,b}$ et $\mathcal{S}'_{a,b}$; on a, pour $n \geq 1$, pour $a, b \geq 3$:

$$s_{a,b} = s'_{a,b} + s'_{a,b-1} + s'_{a-1,b} + s'_{a-1,b-1} \quad ; \quad \sum_{a+b=n+2} s'_{a,b} u^a v^b = s_{n+2}^\setminus(2,0). \quad (\text{C.23})$$

L'égalité de droite dans l'équation ci-dessus est issue de la Remarque 35 (p.102). On peut alors calculer les premiers termes :

$$\begin{aligned} \sum_{a,b \geq 2} s_{a,b} u^a v^b t^{a+b-2} &= 3u^2 v^2 t^2 + (u^3 v^2 + u^2 v^3) t^3 + 3u^3 v^3 t^4 + (3u^4 v^3 + 3u^3 v^4) t^5 \\ &\quad + (u^5 v^3 + 12u^4 v^4 + u^3 v^5) t^6 + (18u^5 v^4 + 18u^4 v^5) t^7 \\ &\quad + (12u^6 v^4 + 78u^5 v^5 + 12u^4 v^6) t^8 + O(t^9). \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Si on calcule plus de termes dans la série ci-dessus, on trouve que les coefficients de la forme $u^{a+1} v^{2a+1} t^{3a}$ font apparaître le nombre $\text{Cat}_{a+1} \text{Cat}_{a-1} - \text{Cat}_a \text{Cat}_a$, qui compte les bois de Schnyder triangulés à $n+2$ sommets (voir paragraphe B.7.3, p.127). Cette suite, qui commence par 1, 1, 3, 14, 84, 594, ..., est répertoriée dans l'OEIS [A005700](#). Elle compte également le nombre de paires de chemins de Dyck de taille $2a-2$ et qui ne se croisent pas, comme l'ont montré [BB09]. Dans le paragraphe suivant on donne une bijection directe entre les orientations bipolaires W-admissibles et ces paires de chemins de Dyck.

Remarque 59. Puisque les étiquetages de Schnyder sont en relation avec les polyèdres en coin rigides, il est intéressant de pouvoir compter le nombre $\tilde{s}_n$ des étiquetages de Schnyder dont les sommets blancs extérieurs ne sont pas isolés. On peut alors utiliser un argument similaire à celui donné à la Remarque 35 (p.102). Pour $n \geq 4$, on a alors $s_n = \tilde{s}_n + 3\tilde{s}_{n-1} + 3\tilde{s}_{n-2} + \tilde{s}_{n-3}$; on donne une illustration à la figure C.11. On a l'égalité sur les séries suivante : $1 + (1+t)^3 \sum_{n \geq 2} \tilde{s}_n t^n = 1 + 3t + \sum_{n \geq 2} s_n t^n$. On peut donc calculer les premiers termes de la série des $\tilde{s}_n$:

$$t^3 + 3t^5 + 4t^6 + 15t^7 + 42t^8 + 131t^9 + 438t^{10} + 1467t^{11} + 5204t^{12} + O(t^{13}). \quad (\text{C.25})$$

On sait que si deux polyèdres en coin induisent les mêmes étiquetages de Schnyder, alors ils induisent aussi les mêmes orientations polyédrales (voir Remarque 19, p.51). Ceci implique que nécessairement on a $p_n \leq \tilde{s}_n$, et on peut constater sur ces premiers termes que cette inégalité est bien vérifiée; les termes commencent à devenir différents à partir de l'ordre $n = 8$.

On peut également déduire de la figure C.11 une décomposition pour $s_{a,b}$ qui compte les étiquetages de Schnyder selon leur nombre de sommets blancs et noirs.

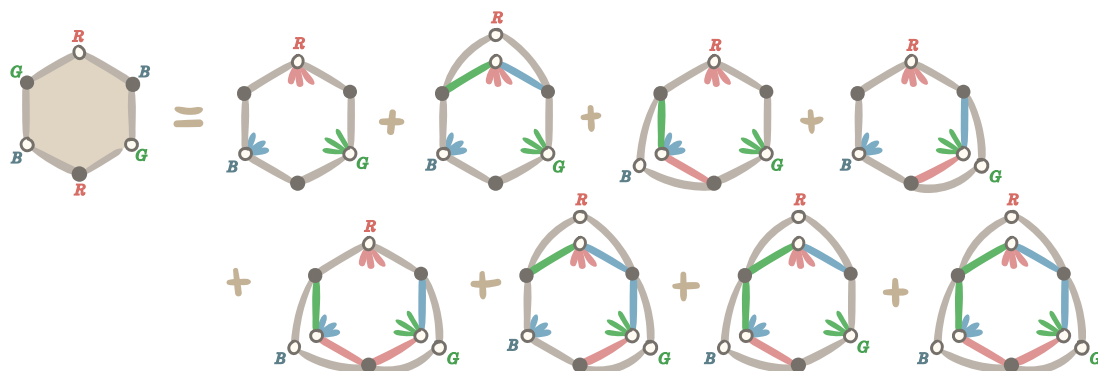


FIGURE C.11 – On peut décomposer l'ensemble des étiquetages de Schnyder à l'aide d'éléments de $\tilde{\mathcal{S}}$, les étiquetages de Schnyder dont les sommets extérieurs blancs ne sont pas isolés. Pour les éléments de petite taille cette décomposition ne tient pas et on compte à la main leur contribution.

On a que $u^2 + (1 + vt)^3 \sum_{a,b} \tilde{s}_{a,b} u^a v^b t^{a+b-2} = u^2(1 + 3vt) + \sum_{a,b} s_{a,b} u^a v^b t^{a+b-2}$. On peut à nouveau calculer les premiers termes de la série des $\tilde{s}_{a,b}$:

$$u^3 v^2 t^3 + 3u^4 v^3 t^5 + (u^5 v^3 + 3u^4 v^4) t^6 + 15u^5 v^4 t^7 + (12u^6 v^4 + 30u^5 v^5) t^8 + O(t^9). \quad (\text{C.26})$$

Dans cette section on a donné plusieurs récurrence qui permettent chacune de calculer une suite liée à des étiquetages de Schnyder : $s'_n, s_n, s_{a,b}$ et $\tilde{s}_n$ qui compte le nombre de polyèdres en coin rigides avec $n + 3$ flats. On a également décrit les étiquetages de Schnyder à l'aide de marches à petits pas, bimodales, et qui font intervenir des motifs interdits. Dans le chapitre suivant (voir la section D.3, p.172), on calculera la limite $\lim s_n^{1/n}$ et on conjecturera un équivalent asymptotique pour cette suite.

Conclusion Dans ce chapitre on a donné une équation maîtresse (équation (C.1), p.135) qui fournit une équation fonctionnelle pour l'ensemble des marches tandems à grand pas que l'on a donné au chapitre précédent. On a pu spécialiser cette équation maîtresse aux différents modèles de notre étude. On a également donné, pour la plupart des modèles, une description sous forme de marche à petits pas dans le quart de plan. Dans le cas des posets plans comptés par sommets, cette description découle de manipulations algébriques sur l'équation maîtresse et donne des marches sans contraintes ; alors que, pour les autres modèles, on se retrouve avec des motifs de pas successifs exclus.

À chaque fois, on peut se servir de ces descriptions sous forme de marches à petits pas pour donner des algorithmes de calcul en temps polynomial des premiers termes des suites combinatoires. Dans le cas des structures transverses, on obtient alors des algorithmes de complexité similaire à ceux déjà connus [TFI09 ; Tak14 ; Rea12].

Au chapitre suivant, on montre que les familles des posets plans comptés par arêtes et des structures transverses induisent des séries formelles qui ne sont pas holonomes. On conjecture des résultats similaires pour les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder. Ces algorithmes de calcul des premiers termes sont les premiers connus de complexité polynomiale, l'existence de telles récurrences n'étant pas théoriquement assurée.

Dans ce chapitre on a également montré que les posets plans comptés par sommets étaient comptés par la même suite que les permutations planes (section C.3, p.139), et on consacrera le dernier chapitre de cette thèse à donner une démonstration bijective de ce résultat. Du côté des bois de Schnyder triangulés, on a montré ici (section C.4, p.140) comment l'on pouvait redémontrer la bijection avec les paires de chemins de Dyck sans croisements qui avait été mise en évidence dans [Bon05].

Dans le chapitre suivant, on cherche à donner des résultats d'énumération asymptotique sur les familles de cartes de notre étude. Si, dans la plupart des cas, les correspondances avec des marches tandems à grand pas du chapitre B est satisfaisante, on se servira parfois du découpage sous forme de marches à petits pas pour agréger ces marches, et ainsi obtenir une description selon des paramètres pertinents.



Comptage asymptotique des modèles de cartes décorées

Sommaire

D.1 Équivalent asymptotique pour les posets plans et les structures transverses	160
D.1.1 Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes	160
D.1.2 Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre de sommets	162
D.1.3 Énumération asymptotique des structures transverses	163
D.2 Taux de croissance exponentiel des orientations polyédrales	166
D.2.1 Preuve de la borne supérieure $p_n \leq (9/2)^n$	167
D.2.2 Minoration de la limite inférieure : $\liminf p_n^{1/n} \geq 9/2$	167
D.2.3 Conjecture d'un équivalent asymptotique pour p_n	171
D.3 Taux de croissance exponentiel des étiquetages de Schnyder	172
D.3.1 Preuve de la borne supérieure $s_n \leq 2 \cdot (16/3)^n$	172
D.3.2 Minoration de la limite inférieure : $\liminf s_n^{1/n} \geq 16/3$	174
D.3.3 Conjecture d'un équivalent asymptotique pour s_n	177

Introduction Dans ce chapitre on cherche à donner des résultats d'énumération asymptotique pour les modèles de cartes décorées de notre étude.

Pour trois de nos modèles (à la section D.1), ceux qui sont comptés par des marches monomodales, nous allons appliquer la méthode donnée par A. Bostan, K. Raschel,

et B. Salvy dans [BRS14] (voir section VI) et qui permet de donner un équivalent à l'aide d'une étude des séries des pas associées. De ces résultats asymptotiques nous pourrions déduire la non-holonomie des séries génératrices induites, en nous servant d'une méthode de caractérisation de la rationalité des coefficients critiques $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi)$ qui est encore donnée dans [BRS14].

Pour les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder, qui sont comptés par des marches bimodales, ces méthodes ne s'appliquent pas. Aussi, on montre à la main (aux sections D.2 et D.3) les limites des suite $p_n^{1/n}$ et $s_n^{1/n}$. Pour cela, on compare des marches contraintes au quart de plan à des marches libres, sur au moins une partie de leur promenade. Même si on ne peut pas appliquer directement les méthodes de [BRS14], nous déduisons tout de même des conjectures pour les équivalents de p_n et s_n , si d'aventure, on pouvait disposer d'une méthode similaire pour des marches bimodales.

D.1 Équivalent asymptotique pour les posets plans et les structures transverses

On s'appuie ici sur une méthode fournie par A. Bostan, K. Raschel, et B. Salvy dans [BRS14] et qui permet d'obtenir des équivalents asymptotiques pour des marches contraintes discrètes. Leur travail repose lui-même sur celui de D. Denisov et V. Wachtel [DW15] et qui étudie le comportement asymptotique de marches aléatoires (discrètes ou continues) et contraintes à rester dans un cône. Ces résultats sont rappelés à la section VI (p.67). Dans toute cette section on reprend les notations $(\mathcal{S}_t, \omega, S(z; x, y), S(z), \rho, \gamma, z_0)$ de cette section VI.

On traite successivement trois de nos cinq modèles : au paragraphe D.1.1 on donne un équivalent asymptotique pour les posets plans comptés par arêtes, puis par sommets au paragraphe D.1.2. Au paragraphe D.1.3 on trouve un équivalent pour les structures transverses selon leur paramètre v .

D.1.1 Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre d'arêtes

On peut appliquer la méthode de [BRS14] pour obtenir le résultat asymptotique suivant.

Proposition D.1. Soient p, q deux entiers strictement positifs et $e_n(p, q)$ le nombre de posets plans à n arêtes et avec un type extérieur (p, q) . Soient également :

- $\gamma \approx 4.80$ donné par $\gamma = 5z_0^3 + 7z_0^2 - 13z_0 + 9$, où $z_0 \approx 0.54$ est l'unique racine positive du polynôme $Z^4 + Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1$;
- $\alpha \approx 5.14$ donné par $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi)$, où $\xi \approx 0.73$ est donné par $\xi = 1 - z_0/2$.

Alors il existe une constante strictement positive c , qui dépend séparément de p et de q , et telle que :

$$e_n(p, q) \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}. \quad (\text{D.1})$$

De plus, la fonction génératrice associée $\sum_{n \geq 1} e_n(p, q) z^n$ n'est pas holonome. Par ailleurs, pour $n \geq 2$, on a $e_n = e_{n+4}(1, 1)$. Cet équivalent asymptotique tient donc également pour $e_n \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$, et la série génératrice associée $\sum_{n \geq 1} e_n z^n$ n'est pas non plus holonome.

Démonstration. Comme nous l'avions vu au paragraphe C.2.1 (p.136), les marches tandems E-admissibles correspondent à un poids $\omega(i, j) = \mathbf{1}_{i, j \geq 1}$. Par le Corollaire B.1 (p.112), $e_n(p, q)$ compte bien le ω -nombre de marches tandems de longueur $n - 1$ et allant de $(0, p)$ en $(q, 0)$. On montre dans un premier temps l'équivalent asymptotique annoncé, puis on en déduit que la série n'est pas holonome, et enfin on montre la formule $e_n = e_{n+4}(1, 1)$ qui permet de transposer à la série générique.

Pour obtenir l'équivalent asymptotique, on calcule les paramètres z_0, γ donnés par la méthode de A. Bostan, K. Raschel, et B. Salvy que l'on a donnée à la section VI (p.67). La série génératrice des pas pondérés est donnée par :

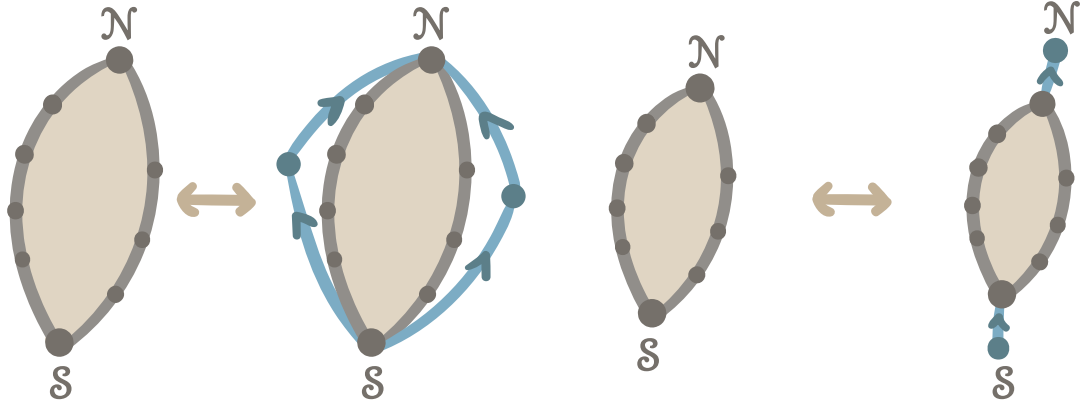
$$S(z; x, y) = \frac{x}{y} z^{-2} + \frac{z/x}{1 - z/x} \frac{zy}{1 - zy}. \quad (\text{D.2})$$

La série $S(z) - z^2$ vaut alors $z^2/(1 - z)^2$ et son rayon de convergence ρ vaut 1. On calcule également la dérivée $S'(z) = \frac{2(z^4 + z^3 - 3z^2 + 3z - 1)}{z^3(1 - z)^3}$. On constate que $S'(z)$ a une unique racine positive z_0 sur le segment ouvert $]0, \rho[$ qui est l'unique racine positive du polynôme $P(Z) = Z^4 + Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1$. On a l'approximation $z_0 \approx 0.54$. Comme P est le polynôme minimal de z_0 , alors toute expression dans $\mathbf{Q}[z_0]$ se réduit en une expression polynomiale en z_0 de degré inférieur à $\deg(P) = 4$. Comme $S(z; x, y)$ est rationnelle en x, y, z , alors $\gamma = S(z_0)$ et $\xi = -\frac{\partial_x \partial_y S(z_0; 1, 1)}{\partial_x^2 S(z_0; 1, 1)}$ sont également rationnels en z_0 . On peut donc effectuer de telles réductions et on obtient $\gamma = 5z_0^3 + 7z_0^2 - 13z_0 + 9$ et $\xi = 1 - z_0/2$. On a donc bien l'équivalent asymptotique $e_n(p, q) \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$ tel que formulé dans l'énoncé.

Pour montrer que la série des $e_n(p, q)$ n'est pas holonome, on applique le résultat donné à la Proposition 16 (p.68). Comme $z_0 = 2 - 2\xi$, le polynôme minimal de ξ est $X(s) = P(2 - 2s)$. On calcule le numérateur de $X((\zeta - \zeta^{-1})/2)$ qui est le polynôme irréductible $\zeta^8 - 9\zeta^7 + 31\zeta^6 - 62\zeta^5 + 77\zeta^4 - 62\zeta^3 + 31\zeta^2 - \zeta + 1$. Ce numérateur n'est pas cyclotomique car, comme le rappelle [BRS14], tous les polynômes cyclotomiques de degré au plus 30 ont leurs coefficients dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aussi, quels que soient p, q , la série $\sum_{n \geq 1} e_n(p, q) z^n$ n'est pas holonome.

Enfin, on montre que, pour $n \geq 2$, on a $e_n = e_{n+4}(1, 1)$. Cela découle du fait que les posets plans à n arêtes sont en bijection avec les posets plans à $n + 4$ arêtes et de type extérieur $(1, 1)$. Il s'agit d'encapsuler un poset plan générique en lui ajoutant un bord latéral gauche et un bord latéral droit de taille 2 (voir figure D.1a).

◆



(a) Les posets plans à n arêtes sont en bijection avec les posets plans à $n+4$ arêtes et de type extérieur $(1,1)$. (b) Les posets plans à n sommets sont en correspondance avec les posets plans à $n+2$ sommets et de pôle-type $(0,0)$.

FIGURE D.1 – Encapsulation de posets plans.

D.1.2 Énumération asymptotique des posets plans comptés par leur nombre de sommets

On calcule ici, par la même méthode, l'équivalent asymptotique pour les posets plans comptés par le nombre de sommets. Sans surprise et comme le justifie la Proposition C.2 (p.139), on retrouve le même équivalent que celui trouvé dans [Bou+18].

Proposition D.2. Soient p, q deux entiers positifs et $v_n(p, q)$ le nombre de posets plans à $n+2$ sommets et avec un pôle-type (p, q) . Soient également :

- $\gamma \approx 11.09$ donné par $\gamma = (11 + 5\sqrt{5})/2$, et $z_0 = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.38$;
- $\alpha = 6$, et $\xi \approx 0.38$ donné par $\xi = (1 + \sqrt{5})/4$.

Alors il existe une constante strictement positive c , qui dépend séparément de p et de q , et telle que :

$$v_n(p, q) \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha} \sim c \cdot \left(\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \right)^n n^{-6}. \quad (\text{D.3})$$

Par ailleurs, pour $n \geq 2$, on a $v_n = v_{n+2}(0, 0)$. Cet équivalent asymptotique tient donc également pour v_n , et la série génératrice associée est d'ailleurs holonome.

Démonstration. Comme nous l'avons vu au paragraphe C.3.1 (p.139), les marches tandems V-admissibles correspondent à un poids $\omega(i, j) = \binom{i+j}{i}$. Par la Proposition B.2 (p.113), $v_n(p, q)$ compte bien le ω -nombre de marches tandems de longueur n et allant de $(0, p)$ en $(q, 0)$. On montre dans un premier temps l'équivalent asymptotique annoncé, puis on montre la formule $v_n = v_{n+2}(0, 0)$ qui permet de transposer l'équivalent.

Pour obtenir l'équivalent asymptotique, on calcule les paramètres z_0, γ donnés par la méthode de [BRS14] que l'on a donnée à la section VI (p.67). La série génératrice

des pas pondérés est donnée par :

$$S(z; x, y) = \frac{x}{y} z^{-2} + \frac{1}{1 - z/x - zy}. \quad (\text{D.4})$$

La série $S(z) - z^2$ vaut alors $1/(1 - 2z)$ et son rayon de convergence ρ vaut $1/2$. On calcule également la dérivée $S'(z) = \frac{2(z-1)(z^2-3z+1)}{(z^3(1-2z)^2)}$. On constate que $S'(z)$ a une unique racine positive z_0 sur le segment ouvert $]0, \rho[$ qui est l'unique racine positive du polynôme $P(Z) = Z^2 - 3Z + 1$. On a $z_0 = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.38$. Toute expression dans $\mathbf{Q}[z_0]$ se réduit en une expression de la forme $a + a'\sqrt{5}$, avec $a, a' \in \mathbf{Q}$. On trouve que $\gamma = (11 + 5\sqrt{5})/2 \approx 11.09$; et que $\xi = 1 - z_0/2$ vaut $\xi = (1 + \sqrt{5})/4 \approx 0.38$. Enfin, on calcule $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi) \approx 6$. On a donc bien l'équivalent asymptotique $v_n(p, q) \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$ tel que formulé dans l'énoncé.

Enfin, on montre que, pour $n \geq 0$, on a $v_n = v_{n+2}(0, 0)$. Cela découle du fait que les posets plans à n sommets sont en bijection avec les posets plans à $n + 2$ arêtes et de pôle-type $(0, 0)$. Il s'agit d'encapsuler un poset plan générique en lui ajoutant une nouvelle source (resp. un nouveau puits) connecté à l'ancienne source (resp. ancien puits), voir figure D.1b.

Enfin le caractère d'holonomie est assurée par la Proposition C.2 (p.139), et énonce que v_n compte également les permutations planes, et dont on sait déjà que la série génératrice est holonome [Bou+18]. ♦

D.1.3 Énumération asymptotique des structures transverses

Proposition D.3. Soient p, q deux entiers strictement positifs et $t_n(v)^{(p,q)}$ le v -nombre de structures transverses à $n + 4$ sommets et de $\mathcal{WE}$ -type (p, q) . Et, pour v un réel positif, soient également :

$$\gamma(v) = \frac{1}{2(2+v)} \left(2v^2 + 18v + 27 + (9+4v)^{3/2} \right) \quad \text{et} \quad z_0(v) = \frac{-3 + \sqrt{9+4v}}{2v}; \quad (\text{D.5})$$

$$\alpha(v) = 1 + \frac{\pi}{\arccos(\xi(v))} \quad \text{où} \quad \xi(v) = \frac{1}{4(2+v)^2} \left(4v^2 + 14v + 11 + \sqrt{9+4v} \right). \quad (\text{D.6})$$

Alors il existe une constante strictement positive $c(v)$, qui dépend séparément de p et de q , et telle que :

$$t_n(v)^{(p,q)} \sim c(v) \cdot \gamma(v)^n n^{-\alpha(v)}. \quad (\text{D.7})$$

Par ailleurs, on a $t_n(v) = t_{n+2}(v)^{(1,1)}$. Cet équivalent asymptotique tient donc également pour $t_n(v) \sim c(v) \cdot \gamma(v)^n n^{-\alpha(v)}$. Pour le cas des structures transverses triangulées (à savoir $v = 0$) et pour le cas générique ($v = 1$), on a les évaluations :

$$\gamma(0) = \frac{27}{2}, \quad \xi(0) = \frac{7}{8}, \quad \alpha(0) \approx 7.22, \quad \gamma(1) = \frac{47 + 13\sqrt{13}}{6}, \quad \xi(1) = \frac{29 + \sqrt{13}}{36}, \quad \alpha(1) \approx 8.18. \quad (\text{D.8})$$

Et dans ces deux cas, les séries génératrices associées $\sum_{n \geq 1} t_n(0)z^n$ et $\sum_{n \geq 1} t_n(1)z^n$ ne sont pas holonomes.

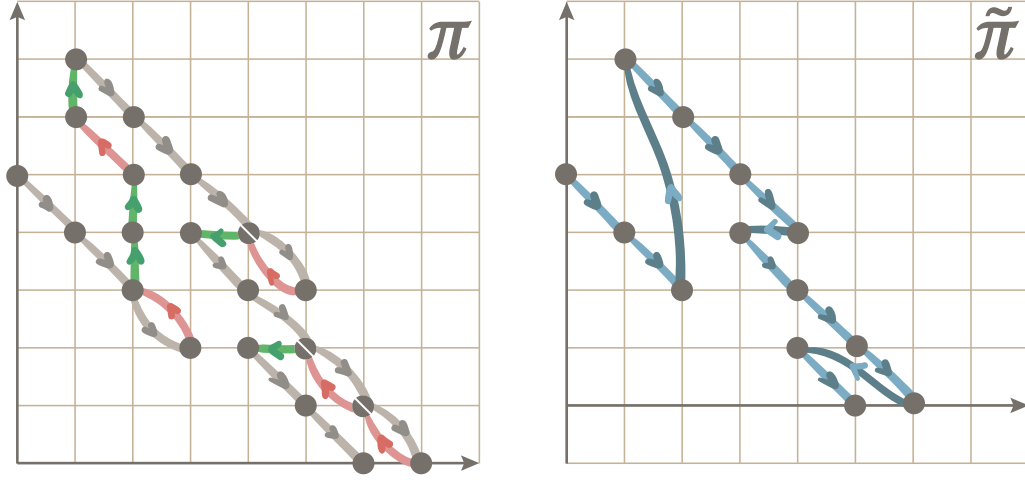


FIGURE D.2 – $\tilde{\pi}$ est obtenue à partir de π en retirant le dernier pas SE, et en agrégeant tous les pas (non-SE) qui suivent chaque pas SE.

Démonstration. Comme nous l'avons vu au paragraphe C.5.1 (p.142), les marches tandems T-admissibles correspondent à un poids $\omega(i, j) = \sum_{r \geq 0} \frac{(i+j-2-r)!}{(i-1-r)!(j-1-r)!r!} v^r$. Par la Proposition B.4 (p.119), $t_n(v)^{(p,q)}$ compte bien le ω -nombre de marches tandems allant de $(0, p)$ en $(q, 0)$ et ayant n pas SE. On ramène, dans un premier temps, ces marches à des marches agrégées, et dont la longueur compte n , le nombre de sommets internes de la structure transverse (comptés pour l'instant par le nombre de pas SE). On montre ensuite l'équivalent asymptotique annoncé, puis la formule $t_n(v) = t_{n+2}(v)^{(1,1)}$. Enfin, on montre que la série génératrice n'est pas holonome dans les cas $v = 0$ et $v = 1$.

Pour construire des marches à pas agrégés, on part du point de vue à petits pas donné au paragraphe C.5.2 (p.144). Soit π une T -marche tandem avec n pas SE, qui part de $(0, p)$ et termine en $(0, q)$. Les conditions sur les motifs interdits impliquent que π commence par un pas SE et termine également par un pas SE. Soit $\tilde{\pi}$ la marche obtenue à partir de π en retirant le dernier pas SE, et en agrégeant tous les pas (non-SE) qui suivent chaque pas SE (voir une exemple à la figure D.2). Si le nouveau pas σ est un agrégat des anciens pas $s_1, \dots, s_k$, alors le poids de σ est donné par $\omega(\sigma) = \prod_{i=1}^k \omega(s_i)$. On déplace le point de départ en $(0, p-1)$, de telle sorte à ce que la marche soit toujours conditionnée à rester dans le quart de plan. La série des pas agrégés est alors donnée par :

$$S(z; x, y) = \frac{x\bar{y}z^{-2}}{1 - \check{S}(z; x, v)}, \quad \text{avec} \quad \check{S}(z; x, v) = \frac{z^2\bar{x}y}{1 - z(\bar{x} + v\bar{x}y + y)}. \quad (\text{D.9})$$

Pour obtenir l'équivalent asymptotique, on calcule les paramètres z_0, γ donnés par la méthode de [BRS14] que l'on a donnée à la section VI (p.67). La série $S(z) - z^2$ vaut alors $\frac{1}{1-2z-z^2}$ et son rayon de convergence $\rho(v)$ vaut $\frac{\sqrt{v+2}}{v+1} - 1$. On calcule également

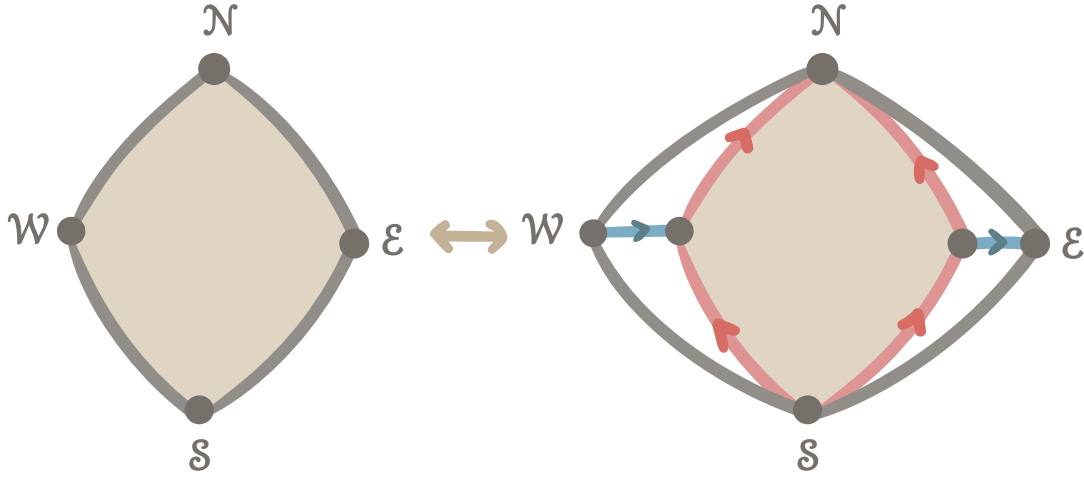


FIGURE D.3 – Les structures transverses à $n + 4$ sommets (à gauche) sont en bijection avec les structures transverses à $n + 6$ sommets et de $\mathcal{WE}$ -type $(1, 1)$ (à droite).

la dérivée $S'(z) = \frac{2(z^4 + z^3 - 3z^2 + 3z - 1)}{z^3(1-z)^3}$. La fonction $S(z)$ restreinte au segment $]0, \rho(v)[$ est convexe et diverge lorsque z tend vers 0^+ ou vers $\rho(v)^-$. Elle admet donc un unique minimum là où sa dérivée s'annule. On a :

$$S'(z) = -2 \frac{(vz^2 + z^2 + z - 1)(vz^2 + 3z - 1)}{(vz^2 + z^2 + 2z - 1)^2 z^3}. \quad (\text{D.10})$$

La seule racine du numérateur de $S'(z)$ sur le segment ouvert $]0, \rho(v)[$ est donnée comme étant l'une des deux racines du polynôme $P(Z) = vZ^2 + 3Z - 1$. On a $z_0(v) = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4v}}{2v}$. On remarque que, malgré la division par v , $z_0(v)$ est bien régulière en $v = 0$ et on a $z_0(v) = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}v + \frac{2}{243}v^2 + O(v^3)$. On calcule ensuite $\gamma(v) = S(z_0(v))$ et $\xi(v)$ et obtient bien les formules et l'équivalent donné dans l'énoncé.

On montre qu'on a $t_n(v) = t_{n+2}(v)^{(1,1)}$. Cela découle du fait que les structures transverses à $n + 4$ sommets sont en bijection avec les structures transverses à $n + 6$ sommets et de $\mathcal{WE}$ -type $(1, 1)$. Il s'agit d'encapsuler une structure transverse en lui ajoutant un pôle $\mathcal{W}$ et une pôle $\mathcal{W}$ (voir figure D.3).

On monte enfin que les séries génératrices associées aux cas $v = 0$ et $v = 1$ ne sont pas holonomes ; on applique le résultat donné à la Proposition 16 (p.68). Soit $v \in \{0, 1\}$, on considère $X_v(s)$ le polynôme minimal associé à $\xi(v)$. Pour $v = 0$, on trouve $X_0(s) = 8s - 7$; alors $X_0(\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}))$ vaut $(4\zeta^2 - 7\zeta + 4)/\zeta$, dont le numérateur n'est pas cyclotomique, puisqu'il est de degré inférieur à 4 et avec des coefficients qui sont strictement plus grands (en valeur absolue) que 2. La série des $t_n z^n$ n'est donc pas holonome. Pour $v = 1$, on a $X_1(s) = 36s^2 - 58s + 23$; $X_1(\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}))$ vaut alors $\frac{1}{36x^2}(36x^4 - 58x^3 + 95x^2 - 58x + 36)$ qui n'est pas non plus cyclotomique pour la même raison. De même, la série génératrice associée n'est pas holonome. ♦

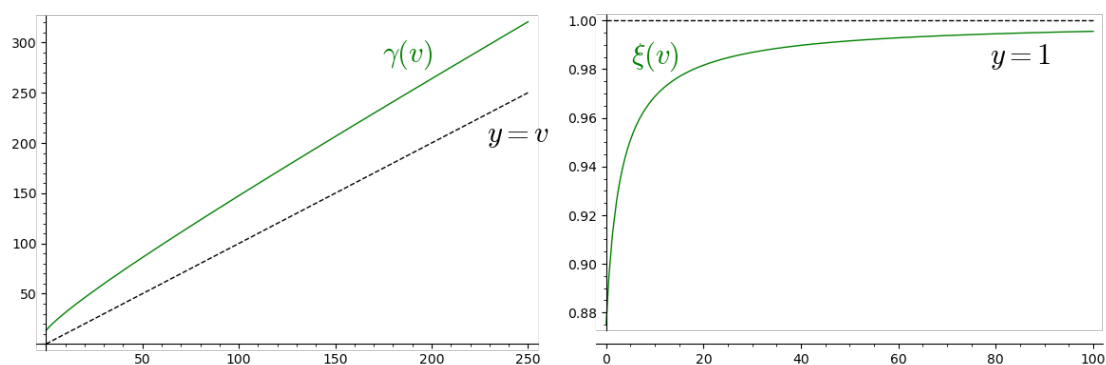


FIGURE D.4 – À gauche le tracé de la fonction $\gamma(v)$, on a que $\gamma(v) \sim v$ lorsque v tend vers $+\infty$. À droite le tracé de $\xi(v)$.

Remarque 60. Une analyse rapide des fonction $\gamma(v)$ et $\xi(v)$ permet de montrer que ces deux fonctions tendent respectivement vers $+\infty$ et 1 lorsque v tend vers l'infini (voir figure D.4). On a aussi que $\gamma(v)$ est asymptotiquement équivalent à 1. On déduit de la limite de ξ , que $\alpha(v)$ tend vers $+\infty$ quand v tend vers plus l'infini, on a ainsi un continuum d'exposants critiques à travers les familles de structures transverses paramétrées par v .

D.2 Taux de croissance exponentiel des orientations polyédrales

Dans cette section, on souhaite donner des résultats de comptage asymptotique pour les orientations polyédrales. Mais les marches tandems P-admissibles sont des marches bimodales, où l'ensemble des pas autorisés dépend de la parité de l'ordonnée courante ; et il n'est pas possible d'appliquer les résultats de A. Bostan, K. Raschel et B. Salvy à ce genre de marches. On se contente ici de calculer le coefficient de croissance, c'est-à-dire la limite de $p_n^{1/n}$.

Proposition D.4. *Le nombre p_n d'orientations polyédrales ayant n sommets internes vérifie $\lim p_n^{1/n} = 9/2$. Pour tout entier n , on a même $p_n \leq (9/2)^n$.*

Au paragraphe suivant ; on montre la borne supérieure $p_n \leq (9/2)^n$. Compte tenu de ce premier résultat il suffit ensuite de montrer que $\liminf p_n^{1/n} \geq 9/2$, ce qu'on fait au paragraphe D.2.2 (p.167). Enfin, au paragraphe D.2.3 (p.171), on donne une conjecture d'un équivalent pour p_n , dans le cas où les méthodes de [BRS14] pourraient s'appliquer.

D.2.1 Preuve de la borne supérieure $p_n \leq (9/2)^n$

Dans un premier temps, on majore le nombre de marches contraintes comptées par p_n par le nombre de marches libres qui terminent en $(1, 1)$, on donne ensuite une majoration de ces marches à l'aide d'une analyse de sa série des pas.

Soit donc π une marche tandem P-admissible de longueur $n-1$, contrainte au quart de plan, qui commence en $(0, 0)$ et qui termine sur l'axe x des abscisses. La marche π ne peut pas repasser une seconde fois par l'origine puisqu'aucun pas horizontal n'est autorisé lorsqu'on est sur l'axe des abscisses, à une hauteur 0 paire. Donc, si π termine sur l'axe des abscisses, elle y termine en un point $(2i+2, 0)$, pour un certain entier i positif. On peut ajouter à π un pas $(-2i-1, 1)$ pour terminer alors en $(1, 1)$. Une telle construction étant injective, on a que p_n est majoré par le nombre $\check{p}_n$ de marches tandems P-admissibles de longueur n , qui partent de l'origine, qui terminent en $(1, 1)$ (et qui ne restent pas nécessairement dans le quart de plan). À présent, on majore $\check{p}_n$ pour obtenir une majoration sur p_n .

Soient $S^\square = \{SE\} \cup \{(-2i, 2j), i \geq 0, j \geq 1\}$ l'ensemble des pas autorisés à commencer à une ordonnée y paire, et $S^\diamond = \{SE\} \cup \{(-2i, 2j), i \geq 1, j \geq 0\}$ pour ceux qui peuvent commencer à une ordonnée impaire. Soit $S^\square(x, y)$ (resp. $S^\diamond(x, y)$) la série des pas qui commencent à une ordonnée y paire (resp. impaire). On a alors :

$$S^\square(x, y) = x\bar{y} + \frac{1}{1-\bar{x}^2} \frac{y^2}{1-y^2} + \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2} \frac{y}{1-y^2}, \quad S^\diamond(x, y) = x\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{1-\bar{x}^2} \frac{1}{1-y^2} + \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2} \frac{y}{1-y^2}. \quad (D.11)$$

On remarque qu'on a l'égalité $S^\square(z^{-1/2}, z^{1/2}) = S^\diamond(z^{-1/2}, z^{1/2}) = z^{-1} + 2z/(1-z)^2$. On notera $S(z)$ cette valeur commune qui définit une série convergente pour z dans $]0, 1[$. Soit $z \in]0, 1[$, alors S^n compte le nombre pondéré de marches tandems P-admissibles de longueur n qui commencent à l'origine ; les marches qui terminent en $(-i, j)$ ont alors un poids $z^{(j-i)/2}$ dans $S(z)$. Aussi, les marches qui terminent en $(1, 1)$ ont un poids 1, et on a $p_n \leq \check{p}_n \leq S(z)^n$. On peut optimiser cette borne en prenant le z qui minimise $S(z)$; on trouve que $S'(z) = 0$ pour $z_0 = 1/3$ et on a $S(z_0) = 9/2$. On a donc bien montré que $p_n \leq (9/2)^n$ pour tout n .

D.2.2 Minoration de la limite inférieure : $\liminf p_n^{1/n} \geq 9/2$

On définit une loi de probabilité sur les pas des marches tandems P-admissibles et on montre, qu'asymptotiquement, les marches aléatoires induites restent presque-sûrement dans une boîte de taille sous-linéaire (Lemme D.5). Forts de ce constat, on minore l'ensemble des marches qui restent dans le quart de plan par des marches dont on a fixé les premiers et derniers pas pour les éloigner du bord du quadrant et qui se comportent donc comme des marches libres tout en restant dans le quart de plan.

On note $\mu^\square$ la distribution de probabilité sur $S^\square$ donnée par $\mu^\square(i, j) = z_0^{(j-i)/2}/S(z_0)$ pour tout pas de la forme (i, j) dans $S^\square$. De même, on définit la distribution de probabilité $\mu^\diamond$ sur $S^\diamond$ donnée par $\mu^\diamond(i, j) = z_0^{(j-i)/2}/S(z_0)$ pour tout pas de la forme (i, j)

dans $\mathcal{S}^\circ$. On appelle *marche aléatoire P-admissible* la marche aléatoire qui part de l'origine $(0,0)$, et où chaque pas commençant à une ordonnée y paire (resp. impaire) est tiré selon la loi $\mu^\square$ (resp. μ°). Soit P_n la marche formée par les n premiers pas de la marche aléatoire P-admissible. Si π est une marche tandem P-admissible de longueur n et qui termine en (i,j) alors on a que $\mathbb{P}(P_n = \pi) = z_0^{(j-i)/2} / S(z_0)^n$. On présente à présent la propriété centrale de cette preuve :

Lemme D.5. *La marche aléatoire P_n , formée par les n premiers pas de la marche aléatoire P-admissible, reste asymptotiquement presque-sûrement dans la boîte centrée en l'origine $\llbracket -n^{2/3}, n^{2/3} \rrbracket^2$.*

Démonstration. On introduit $\lambda(n,i,j)$, la probabilité que la marche P_n termine au point (i,j) ; et on pose également $\Lambda_n(x,y) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \lambda(n,i,j) x^i y^j$, la série associée à λ . Dans un premier temps on va procéder à une estimation de Λ à l'aide de considérations d'analyse sur les séries des pas. Ensuite, on majorera asymptotiquement la probabilité de sortir de la boîte $\llbracket -n^{2/3}, n^{2/3} \rrbracket^2$ à l'aide de cette première estimation sur Λ .

On définit les séries $F^\square$ et F° qui sont données par $F^\square(t;x,y) = \sum_{n,i,j} a_{n,i,j} t^n x^i y^j$ et par $F^\circ(t;x,y) = \sum_{n,i,j} b_{n,i,j} t^n x^i y^j$ où $a_{n,i,j}$ (resp. $b_{n,i,j}$) compte le nombre de marches tandems P-admissibles de longueur n , libres dans le plan, qui commencent à un point donné (i_0, j_0) d'ordonnée j_0 paire (resp. impaire) et qui terminent^a en (i_0+i, j_0+j) . Avec les notations précédentes, on a que $\hat{F}^\square(t;x,y) = F^\square(t; x/z_0^{1/2}, y z_0^{1/2})$ est la série génératrice qui compte les marches tandems P-admissibles, qui commencent à l'origine et où chaque marche qui terminent en (i,j) a un poids $z_0^{(j-i)/2}$. Par conséquent, on a la relation entre $\hat{F}^\square$ et Λ qui est donnée par :

$$\Lambda_n(x,y) = \frac{[t^n] \hat{F}^\square(t;x,y)}{[t^n] \hat{F}^\square(t;1,1)}. \quad (\text{D.12})$$

Dans la suite, on va étudier $\hat{F}^\square$ et notamment son comportement autour de $(1,1)$ pour en déduire une estimation sur Λ .

Soit donc $S^{\square\square}(x,y)$ (resp. $S^{\square\circ}(x,y)$; resp. $S^{\circ\square}(x,y)$; resp. $S^{\circ\circ}(x,y)$) la série des pas qui commencent à une hauteur y paire (resp. paire; resp. impaire; resp. impaire) et qui terminent à une hauteur paire (resp. impaire; resp. paire; resp. impaire). Les ensembles de pas associés à ces séries sont respectivement $\mathcal{S}^{\square\square} = \{(-2i, 2j), i \geq 0, j \geq 1\}$, $\mathcal{S}^{\square\circ} = \mathcal{S}^{\circ\square} = \{\text{SE}\} \cup \{(-2i-1, 2j+1), i \geq 0, j \geq 0\}$, et $\mathcal{S}^{\circ\circ} = \{(-2i, 2j), i \geq 1, j \geq 0\}$, et on a alors :

$$S^{\square\square} = \frac{1}{1-\bar{x}^2} \frac{y^2}{1-y^2}, \quad S^{\square\circ} = S^{\circ\square} = x\bar{y} + \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2} \frac{y}{1-y^2}, \quad S^{\circ\circ} = \frac{\bar{x}^2}{1-\bar{x}^2} \frac{1}{1-y^2}. \quad (\text{D.13})$$

On peut alors réaliser une décomposition selon le dernier pas et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} F^\square = 1 + t S^{\square\square} F^\square + t S^{\square\circ} F^\circ, \\ F^\circ = 1 + t S^{\circ\square} F^\square + t S^{\circ\circ} F^\circ. \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

a. Bien entendu, $a_{n,i,j}$ et $b_{n,i,j}$ ne dépendent pas du point de départ choisi puisque la marche n'est pas contrainte à un domaine.

On peut ensuite résoudre ce système d'équations ce qui permet de trouver une expression explicite pour $\hat{F}^\square$. On a :

$$\hat{F}^\square(t; x, y) = \frac{a_1(x, y)t + a_0(x, y)}{b_2(x, y)t^2 + b_1(x, y)t + b_0(x, y)}, \quad (\text{D.15})$$

où $a_0(x, y), a_1(x, y), b_0(x, y), b_1(x, y)$, et $b_2(x, y)$ sont des polynômes explicites en x et y , et qui sont données par :

$$a_0(x, y) = -3x^2y^4 + 9x^2y^2 + y^4 - 3y^2, \quad (\text{D.16})$$

$$a_1(x, y) = -9x^3y^3 + 27x^3y + 6xy^3 - 9xy - 3y^2, \quad (\text{D.17})$$

$$b_0(x, y) = -3x^2y^4 + 9x^2y^2 + y^4 - 3y^2, \quad (\text{D.18})$$

$$b_1(x, y) = -3x^2y^4 - 3y^2, \quad b_2(x, y) = 27x^4y^2 - 81x^4 - 27x^2y^2 + 27x^2. \quad (\text{D.19})$$

Aussi, les racines en t du dénominateur de l'équation (D.15) peuvent se calculer explicitement, puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 2. En notant ces deux racines $1/\gamma(x, y)^\pm$, on a :

$$1/\gamma^\pm(x, y) = \frac{x^2y^4 + y^2 \mp \sqrt{\Delta(x, y)}}{18x^2(1 - 3x^2 + x^2y^2 - y^2)}. \quad (\text{D.20})$$

Où, dans l'équation précédente, le discriminant $\Delta(x, y)$ est un polynôme en x et y et tel que $\Delta(1, 1) = 100$. On peut donner explicitement Δ :

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = & 36x^6y^6 + x^4y^8 - 216x^6y^4 - 48x^4y^6 + 324x^6y^2 + 216x^4y^4 \\ & + 14x^2y^6 - 216x^4y^2 - 48x^2y^4 + 36x^2y^2 + y^4. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

On peut donc donner une décomposition en éléments simples de la série $\hat{F}^\square$, à partir de l'équation (D.15) et des calculs précédents. On a que $\hat{F}^\square$ est de la forme :

$$\hat{F}^\square(t; x, y) = \frac{a_+(x, y)}{1 - t\gamma_+(x, y)} + \frac{a_-(x, y)}{1 - t\gamma_-(x, y)}, \quad a_\pm(x, y) = -\frac{a_1(x, y)\gamma^\pm(x, y) + a_0(x, y)\gamma^\pm(x, y)^2}{2b_2(x, y) + b_1(x, y)\gamma^\pm(x, y)}. \quad (\text{D.22})$$

L'équation précédente permet donc d'extraire les coefficients de $\hat{F}^\square$, on a $[t^n]\hat{F}^\square(t; x, y) = a_+(x, y)\gamma_+(x, y)^n + a_-(x, y)\gamma_-(x, y)^n$. Or, comme on a $a_+(1, 1) = 1$, que $\gamma_-(1, 1) = -3$ et que $\gamma_+(1, 1) = 9/2$, alors $|\gamma_-| < \gamma_+$ au voisinage de $(1, 1)$. Ainsi, pour tout n , on a que la série $\hat{F}^\square(t; x, y)$ est un $\Theta(\gamma_+(x, y)^n)$ au voisinage de $(1, 1)$. Et donc, en revenant à (D.12), on a :

$$\Lambda_n(x, y) = \Theta\left(\left(\gamma_+(x, y)/\gamma_+(1, 1)\right)^n\right). \quad (\text{D.23})$$

Maintenant qu'on a l'estimation que l'on cherchait sur Λ , on va s'en servir pour en déduire une majoration de la probabilité de sortie de la boîte $\llbracket \lfloor -n^{2/3} \rfloor, \lceil n^{2/3} \rceil \rrbracket^2$. On regarde le développement en $(1, 1)$ de $g(x, y) = \gamma_+(x, y)/\gamma_+(1, 1)$. Les dérivées partielles de g selon x et y sont toutes les deux nulles en $(1, 1)$, alors on peut écrire $g(e^r, e^s) =$

$1 + O(r^2 + s^2)$ en (s, r) au voisinage de $(0, 0)$. À présent, si on note (X_n, Y_n) le point d'arrivée de la marche aléatoire P_n , alors pour tout réel r on a :

$$\mathbb{E}[e^{rX_n/\sqrt{n}}] = \Lambda_n(e^{r/\sqrt{n}}, 1) = \Theta((1 + O(1/n))^n) = O(1). \quad (\text{D.24})$$

En particulier on a que $\mathbb{E}[e^{rX_n/\sqrt{n}}]$ est borné et donc, par l'inégalité de Markov, on a $\mathbb{P}[X_n \geq x\sqrt{n}] = O(e^{-x})$. Aussi, par l'inégalité de Boole, la probabilité que P_n visite un point d'abscisse plus grande que $n^{2/3}$ est au plus $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}[X_k \geq n^{2/3}]$. Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a que $\mathbb{P}[X_k \geq n^{2/3}] = \mathbb{P}[X_k \geq x\sqrt{k}]$ pour $x = \sqrt{n/k} \cdot n^{1/6} \geq n^{1/6}$. Ainsi, on trouve que $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}[X_k \geq n^{2/3}] = O(n \exp -n^{1/6}) = o(1)$. De la même manière (et en utilisant $r = 1$ dans (D.24)), on a que la probabilité que P_n visite un point d'abscisse inférieure à $-n^{2/3}$ est un $o(1)$. Enfin, en considérant, dans l'autre sens, $\Lambda(1, e^{\pm 1/\sqrt{n}})$, on a bien que la probabilité que P_n quitte la boîte $\llbracket -n^{2/3}, n^{2/3} \rrbracket^2$ est asymptotiquement un $o(1)$, ce qui conclut la démonstration. ♦

Maintenant qu'on a démontré le Lemme D.5, on définit $\mathcal{B}_n$ comme l'ensemble des marches tandems P-admissibles de longueur n , qui commencent en $(0, 0)$ et qui restent dans la boîte $\llbracket -n^{2/3}, n^{2/3} \rrbracket^2$. Comme nous l'avons vu plus tôt, la probabilité que P_n soit égale à une marche tandem P-admissible donnée vaut $z_0^{(j-i)/2} / S(z_0)^n$. Aussi, chaque marche qui se trouve dans $\mathcal{B}_n$ a une probabilité qui vaut au moins $(2/9)^n \cdot z_0^{-n^{2/3}}$ qui asymptotiquement vaut $(2/9)^{n+o(n)}$. Or, par le Lemme D.5, on sait que la somme des probabilités des marches dans $\mathcal{B}_n$ vaut $1 - o(1)$; par conséquent on se retrouve avec l'inégalité $\#\mathcal{B}_n \geq (2/9)^{n+o(n)}$.

Pour conclure, il s'agit de ramener notre étude sur les marches contraintes au quadrant aux marches tandems P-admissibles libre de $\mathcal{B}_n$. Pour cela on considère des marches dont on choisit les premiers et derniers pas. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des marches tandems P-admissibles de longueur $n - 1$ qui partent de l'origine, qui terminent sur l'axe x des abscisses, qui restent dans le quart de plan. On va noter n' le plus petit entier pair qui soit plus grand que $n^{2/3}$, et on note $k_n = 3n' + 8$. On va définir une injection ι de $\mathcal{B}_{n-k_n}$ dans $\mathcal{P}_n$ comme suit ; soit π une marche dans $\mathcal{B}_{n-k_n}$, alors $\iota(\pi)$ est donnée par :

- a. On commence par un pas $(0, 2n' + 4)$, qui est suivi de $n' + 2$ pas SE, on se retrouve donc à la coordonnée $(n' + 2, n' + 2)$.
- b. On attache ensuite la marche π dans son intégralité ; puisque π est dans $\mathcal{B}_{n-k_n}$ et qu'on la commence en $(n' + 2, n' + 2)$, alors la marche reste dans $\llbracket 2, 2n' + 2 \rrbracket^2$ (et donc dans le quart de plan).
- c. Soit (i, j) le point atteint après avoir concaténé π , il nous reste encore $k_n - 4 - n'$ pas à faire et il nous faut atteindre l'axe des abscisses. On distingue deux cas :
 - (a) Si j est de la même parité que $k_n - 5 - n'$, alors on ajoute le pas $(-2, k_n - 5 - n' - j)$ (c'est bien défini puisque par définition de k_n on a $k_n - 5 - n' - j \geq 1$) suivi de $k_n - 5 - n'$ pas SE.
 - (b) Sinon, on ajoute un pas $(-1, k_n - 5 - n' - j)$ et qui est suivi de $k_n - 5 - n'$ pas SE.



$$\mathbb{E}[e^{rX_n+sY_n/\sqrt{n}}] \sim g(e^{r/\sqrt{n}}, e^{s/\sqrt{n}})^n, \quad (\text{D.25})$$

quart de plan et termine en $(1, 1)$ se comporterait en $c \cdot n^{-1-\pi/\arccos(\xi)}$, où ξ est donné par $\xi = -b/a = 9/16$. On en déduit la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Il existe une constante strictement positive c telle que $p_n \sim c \cdot (9/2)^n n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 1 + \pi/\arccos(9/16)$, c'est-à-dire $\alpha \approx 4.23$.*

Comme pour les modèles précédents, on peut utiliser la méthode des polynômes cyclotomiques donnée dans [BRS14] pour montrer que la constante α de la conjecture précédente n'est pas rationnelle. Aussi, si cette conjecture était vérifiée, on aurait que la série génératrice associée à la suite des p_n n'est pas holonome.

D.3 Taux de croissance exponentiel des étiquetages de Schnyder

Dans cette section on donne des résultats asymptotiques pour les étiquetages de Schnyder. Comme les marches tandems associées sont encore bimodales, on procède à l'aide d'une démonstration *ad hoc*, comme pour les orientations polyédrales. Ici le paramètre de taille des étiquetages de Schnyder est compté par le nombre de pas SE et non pas par le nombre de pas de la marche. Comme pour les structures transverses, on va agréger les pas.

Proposition D.6. *Le nombre s_n d'étiquetages de Schnyder ayant n faces internes vérifie $\lim s_n^{1/n} = 16/3$. Pour tout entier n , on a même $s_n \leq 2 \cdot (16/3)^n$.*

Au paragraphe suivant, on montre la borne supérieure $s_n \leq 2 \cdot (16/3)^n$. Compte tenu de ce premier résultat il suffit ensuite de montrer que $\liminf s_n^{1/n} \geq 16/3$, ce qu'on fait au paragraphe D.3.2 (p.174). Enfin, au paragraphe D.3.3 (p.177), on donne une conjecture d'un équivalent pour s_n , dans le cas où les méthodes de [BRS14] pourraient s'appliquer.

D.3.1 Preuve de la borne supérieure $s_n \leq 2 \cdot (16/3)^n$

Comme pour les orientations polyédrales, l'idée ici est de majorer le nombre s_n par le nombre de marches tandems S-admissibles non-contraintes au quart de plan qui vont de $(0, 2)$ jusqu'en $(1, 1)$ et dont on a agrégé certains des pas. Dans une seconde partie on majore ce nombre de marches libres à l'aide d'outils d'analyse.

On commence par construire ces marches agrégées. On rappelle qu'on a la relation $s_n = s'_n + 2s'_{n-1} + s'_{n-2}$ lorsque $n \geq 4$ (voir Remarque 35, p.102), où s'_n compte le nombre de marches tandems S-admissibles contraintes à rester dans le quart de plan, qui ont $n + 2$ pas SE, qui commencent en $(0, 2)$ et qui terminent en $(2, 0)$. Soit π une telle marche, alors elle termine et commence nécessairement par un pas SE. Dès lors, quitte à retirer le dernier pas de π , on a que s_n compte également le nombre de marches tandems S-admissibles à $n + 1$ pas SE, dans le quart de plan, qui

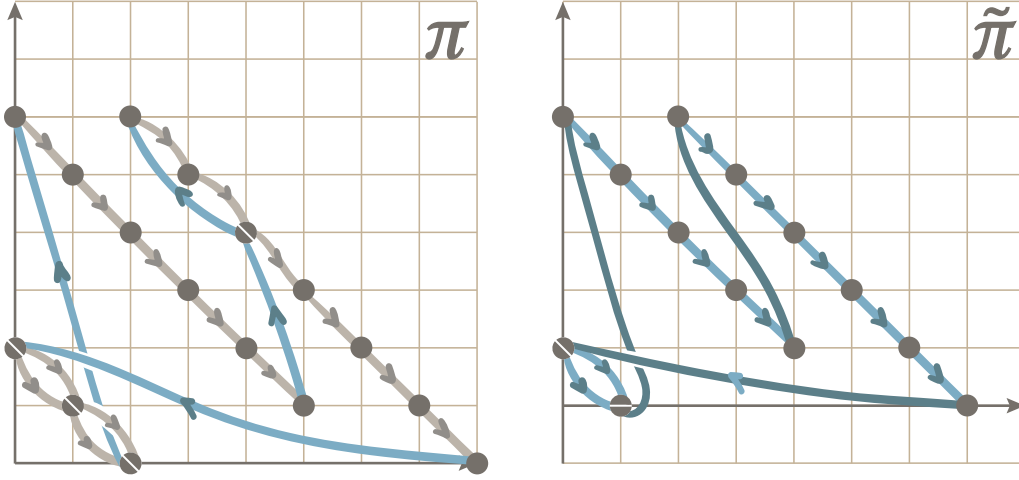


FIGURE D.6 – $\tilde{\pi}$ est obtenue à partir de π en retirant le dernier pas SE, et en agrégeant tous les pas (non-SE) qui suivent chaque pas SE.

partent de $(0,2)$ et terminent en $(1,1)$. Une telle marche commence par un pas SE et on construit $\tilde{\pi}$ en agrégeant chacun de ses pas SE avec l'ensemble (éventuellement vide) des pas non-SE qui les suivent. On donne un exemple à la figure D.6.

On procède à présent à une majoration des marches non-contraintes au quart de plan et qui sont sous cette forme agrégée. On pose $\tilde{S}^{\square}(x,y)$ (resp. $\tilde{S}^{\diamond}(x,y)$) la série des pas-faces pondérés (non-agrégés donc) des marches tandems S-admissibles, qui commencent à une hauteur y paire et qui terminent à une hauteur paire (resp. impaire). De même, on définit $\tilde{S}^{\square}(x,y)$ (resp. $\tilde{S}^{\diamond}(x,y)$) la série des pas-faces pondérés des marches tandems S-admissibles, qui commencent à une hauteur y impaire et qui terminent à une hauteur paire (resp. impaire). On a alors :

$$\tilde{S}^{\square}(x,y) = \sum_{\ell, r \geq 0} \binom{\ell+r}{r} \bar{x}^{2\ell+2} y^{2r+2} = \frac{\bar{x}^2 y^2}{1 - \bar{x}^2 - y^2} = \tilde{S}^{\diamond}(x,y), \quad (\text{D.26})$$

$$\tilde{S}^{\diamond}(x,y) = \sum_{\ell, r \geq 0} \binom{\ell+r}{r} \bar{x}^{2\ell+1} y^{2r+3} = \frac{\bar{x} y^3}{1 - \bar{x}^2 - y^2}, \quad (\text{D.27})$$

$$\tilde{S}^{\square}(x,y) = \sum_{\ell, r \geq 0} \binom{\ell+r}{r} \bar{x}^{2\ell+3} y^{2r+1} = \frac{\bar{x}^3 y}{1 - \bar{x}^2 - y^2}. \quad (\text{D.28})$$

Soit maintenant $A^{\square}(x,y)$ (resp. $A^{\diamond}$) la série des agrégats (éventuellement vides) de pas-faces de marche tandem S-admissible, sans y inclure les pas SE, et qui commencent à une hauteur y paire (resp. impaire). Alors ces deux séries sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} A^{\square}(x,y) = 1 + \tilde{S}^{\square}(x,y)A^{\square}(x,y) + \tilde{S}^{\diamond}(x,y)A^{\diamond}(x,y), \\ A^{\diamond}(x,y) = 1 + \tilde{S}^{\square}(x,y)A^{\square}(x,y) + \tilde{S}^{\diamond}(x,y)A^{\diamond}(x,y). \end{cases} \quad (\text{D.29})$$

On peut alors résoudre le système précédent et on obtient :

$$A^\square(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x y^3 - x^2 + y^2 + 1}{x^2 y^2 - x^2 + 2 y^2 + 1}, \quad A^\diamond(x, y) = \frac{x^3 y^2 - x^3 + x y^2 + x - y}{x(x^2 y^2 - x^2 + 2 y^2 + 1)}. \quad (D.30)$$

Enfin, on pose $S^\square(x, y) = x \bar{y} A^\square(x, y)$ (resp. $S^\diamond(x, y) = x \bar{y} A^\diamond(x, y)$) la série des pas agrégés telle que définie juste avant, en incluant cette fois-ci les pas SE initiaux. On spécialise alors les séries précédentes à $\{x = z^{-\frac{1}{2}}, y = z^{\frac{1}{2}}\}$, et on obtient une simplification. En effet, on a que $\tilde{S}^{\square\square}(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$, $\tilde{S}^{\square\diamond}(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$, $\tilde{S}^{\diamond\square}(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$ et $\tilde{S}^{\diamond\diamond}(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$ sont tous égaux à $z^2/(1 - 2z)$. Ainsi, on a également que $A^\square(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$ et $A^\diamond(z^{-\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{2}})$ sont égaux et valent $\frac{1}{1 - 2z^2/(1 - 2z)}$. De telle sorte l'on peut définir $S(z)$ comme la valeur commune suivante :

$$S(z) = S^\square(z^{-1/2}, z^{1/2}) = S^\diamond(z^{-1/2}, z^{1/2}) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^2/(1 - 2z)}. \quad (D.31)$$

La série S est convergente pour z dans le segment ouvert $]0, 1/2[$. De plus, compte tenu de notre discussion plus haut, on a que $S(z)^n$ est la série des marches tandems S -admissibles qui sont :

- non contraintes au quart de plan, et qui commencent en $(0, 2)$,
- qui ont n pas SE et qui commencent par un pas SE,
- et où chaque marche qui termine en $(i, j + 2)$ est à nouveau pondérée par un facteur $z^{(j-i)/2}$.

Toute marche qui termine en $(1, 1)$ a donc une contribution z^{-1} à la série, et on a donc que $s'_n \leq z S(z)^{n+1}$. À nouveau, on optimise cette majoration en prenant le minimum de S sur $]0, 1/2[$. On a que $S'(z) = 0$ pour $z_0 = 1/4$, et on a l'évaluation $S(z_0) = 16/3$. Aussi on a bien montré que $s'_n \leq (16/3)^{n+1}/4$ et on conclut alors avec le calcul :

$$s_n = s'_n + 2s'_{n-1} + s'_{n-2} \leq 2 \cdot (16/3)^n. \quad (D.32)$$

D.3.2 Minoration de la limite inférieure : $\liminf_n s_n^{1/n} \geq 16/3$

La démonstration de cette minoration suit globalement les mêmes étapes que la démonstration pour les orientations polyédrales, à ceci près qu'il est ici nécessaire d'agréger les pas selon les pas SE. Comme pour la majoration que l'on vient de donner, on agrège tous les pas (non-SE) qui suivent chaque pas SE (voir figure D.6, p.173) et on retire le dernier pas SE.

On note $\mu^\square$ la distribution de probabilité donnée par $\mu^\square(i, j) = a_{i,j} z_0^{(j-i)/2} / S(z_0)$ avec $a_{i,j} = [x^i y^j] S^\square(x, y)$. De même, on définit la distribution de probabilité $\mu^\diamond$ par $\mu^\diamond(i, j) = b_{i,j} z_0^{(j-i)/2} / S(z_0)$ avec $b_{i,j} = [x^i y^j] S^\diamond(x, y)$. On appelle *marche aléatoire S-admissible* la marche aléatoire qui part de l'origine $(0, 0)$ et où chaque pas (SE ou agrégé) commençant à une ordonnée y paire (resp. impaire) est tiré selon la loi $\mu^\square$ (resp. $\mu^\diamond$). Soit P_n la marche formée par les n premiers pas de la marche aléatoire S -admissible. Comme pour les orientations polyédrales on a une propriété qui nous assure que cette marche reste dans une boîte de taille sous-linéaire :

Lemme D.7. *La marche aléatoire P_n , formée par les n premiers pas de la marche aléatoire S -admissible, reste asymptotiquement presque-sûrement dans la boîte centrée en l'origine $\llbracket -n^{2/3}, \lceil n^{2/3} \rceil \rrbracket^2$.*

Démonstration. On introduit $\lambda(n, i, j)$, la probabilité que la marche P_n termine au point (i, j) ; et on pose également $\Lambda_n(x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \lambda(n, i, j) x^i y^j$. Le schéma de la preuve est très similaire à celle du Lemme D.5 (p. Lemme), si ce n'est qu'il faut l'adapter aux séries induites par la marche agrégée. Dans un premier temps on va procéder à une estimation de Λ à l'aide de considérations d'analyse sur les séries des pas. Ensuite, on majorera asymptotiquement la probabilité de sortir de la boîte $\llbracket -n^{2/3}, \lceil n^{2/3} \rceil \rrbracket^2$ à l'aide de cette première estimation sur Λ .

On définit les séries $F^\square$ et $F^\diamond$ comme suit; on pose $F^\square(t; x, y) = \sum_{n, i, j} a_{n, i, j} t^n x^i y^j$ et $F^\diamond(t; x, y) = \sum_{n, i, j} b_{n, i, j} t^n x^i y^j$ où $a_{n, i, j}$ (resp. $b_{n, i, j}$) compte le nombre de marches tandems S -admissibles (agrégées) de longueur n , libres dans le plan, qui commencent à un point donné (i_0, j_0) d'ordonnée j_0 paire (resp. impaire) et qui terminent en $(i_0 + i, j_0 + j)$.

Avec les notations précédentes, on a que $\hat{F}^\square(t; x, y) = F^\square(t; x/z_0^{1/2}, y z_0^{1/2})$ est la série génératrice qui compte les marches tandems S -admissibles (agrégées) qui commencent à l'origine et où chaque marche qui terminent en (i, j) a un poids $z_0^{(j-i)/2}$. Par conséquent, on a la relation entre $\hat{F}^\square$ et Λ qui est donnée par :

$$\Lambda_n(x, y) = \frac{[t^n] \hat{F}^\square(t; x, y)}{[t^n] \hat{F}^\square(t; 1, 1)}. \quad (\text{D.33})$$

Dans la suite, on va étudier $\hat{F}^\square$ et notamment son comportement autour de $(1, 1)$ pour en déduire une estimation sur Λ .

On pose déjà $A^{\square\square}(x, y)$ (resp. $A^{\square\diamond}(x, y)$; resp. $A^{\diamond\square}(x, y)$; resp. $A^{\diamond\diamond}(x, y)$) la série des pas-faces agrégés qui commencent à une hauteur y paire (resp. paire; resp. impaire; resp. impaire) et qui terminent à une hauteur paire (resp. impaire; resp. paire; resp. impaire). Avec ces notations, on peut retrouver $F^\square$ et $F^\diamond$ à l'aide du système :

$$\begin{cases} F^\square = 1 + tx\bar{y}(A^{\square\diamond}F^\square + A^{\diamond\diamond}F^\diamond), \\ F^\diamond = 1 + tx\bar{y}(A^{\square\square}F^\square + A^{\square\diamond}F^\diamond). \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

On va résoudre ce système par la suite, mais auparavant on a besoin de calculer explicitement les séries $A^{\square\square}(x, y), A^{\square\diamond}(x, y), A^{\diamond\square}(x, y)$ et $A^{\diamond\diamond}(x, y)$. Pour cela, on réalise une décomposition selon le dernier pas, et on fait apparaître les séries $\tilde{S}^{\square\square}, \tilde{S}^{\square\diamond}, \tilde{S}^{\diamond\square}$ et $\tilde{S}^{\diamond\diamond}$ qu'on avait définies plus haut. On a :

$$\begin{cases} A^{\square\square} = 1 + \tilde{S}^{\square\square}A^{\square\square} + \tilde{S}^{\square\diamond}A^{\diamond\square}, \\ A^{\square\diamond} = \tilde{S}^{\square\square}A^{\square\diamond} + \tilde{S}^{\square\diamond}A^{\diamond\diamond}; \end{cases} \quad \begin{cases} A^{\diamond\square} = \tilde{S}^{\diamond\square}A^{\square\square} + \tilde{S}^{\diamond\diamond}A^{\diamond\square}, \\ A^{\diamond\diamond} = 1 + \tilde{S}^{\diamond\square}A^{\diamond\square} + \tilde{S}^{\diamond\diamond}A^{\diamond\diamond}. \end{cases} \quad (\text{D.35})$$

On peut alors résoudre ce système d'équations et calculer explicitement ces séries, on obtient :

$$A^{\square\square} = A^{\diamond\diamond} = \frac{x^2 y^2 - x^2 + y^2 + 1}{x^2 y^2 - x^2 + 2y^2 + 1}, \quad A^{\square\diamond} = \frac{-xy^3}{x^2 y^2 - x^2 + 2y^2 + 1}, \quad A^{\diamond\square} = \frac{-y}{x(x^2 y^2 - x^2 + 2y^2 + 1)}. \quad (\text{D.36})$$

Le système donné à l'équation (D.34) peut donc se résoudre et on peut calculer $F^\square$ et F° et on peut déduire $\hat{F}^\square$. On trouve $\hat{F}^\square(t; x, y) = \frac{a_1(x, y)t + a_0(x, y)}{b_2(x, y)t^2 + b_1(x, y)t + b_0(x, y)}$, où les coefficients $a_0(x, y), a_1(x, y), b_0(x, y), b_1(x, y)$ et $b_2(x, y)$ sont des polynômes en x et y qui sont donnés par :

$$a_0(x, y) = 8x^2y^2 - 2x^2y^4 - y^4 - 2y^2, \quad (\text{D.37})$$

$$a_1(x, y) = 32x^3y - 8x^3y^3 - 2x^2y^4 - 2xy^3 - 8xy, \quad (\text{D.38})$$

$$b_0(x, y) = 8x^2y^2 - 2x^2y^4 - y^4 - 2y^2, \quad (\text{D.39})$$

$$b_1(x, y) = -2x^2y^4 - 2y^2, \quad (\text{D.40})$$

$$b_2(x, y) = 32x^4y^2 - 128x^4 + 32x^2. \quad (\text{D.41})$$

Aussi, les racines en t du dénominateur de $\hat{F}^\square$ peuvent se calculer explicitement, puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 2. En notant ces deux racines $1/\gamma(x, y)^\pm$, on a :

$$1/\gamma^\pm(x, y) = \frac{x^2y^4 + y^2 \mp \sqrt{\Delta(x, y)}}{32x^2(x^2y^2 - 4x^2 + 1)}. \quad (\text{D.42})$$

Où, dans l'équation précédente, le discriminant $\Delta(x, y)$ est un polynôme en x et y et tel que $\Delta(1, 1) = 196$. On peut donner explicitement Δ :

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = & 64x^6y^6 + x^4y^8 - 512x^6y^4 + 32x^4y^6 + 1024x^6y^2 \\ & + 2x^2y^6 - 512x^4y^2 + 32x^2y^4 + 64x^2y^2 + y^4. \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

On peut donc donner une décomposition en éléments simples de la série $\hat{F}^\square$, à partir des calculs précédents. On a que $\hat{F}^\square$ est de la forme :

$$\hat{F}^\square(t; x, y) = \frac{a_+(x, y)}{1 - t\gamma_+(x, y)} + \frac{a_-(x, y)}{1 - t\gamma_-(x, y)}, \quad a_\pm(x, y) = -\frac{a_1(x, y)\gamma^\pm(x, y) + a_0(x, y)\gamma^\pm(x, y)^2}{2b_2(x, y) + b_1(x, y)\gamma^\pm(x, y)}. \quad (\text{D.44})$$

L'équation précédente permet donc d'extraire les coefficients de $\hat{F}^\square$, on a $[t^n]\hat{F}^\square(t; x, y) = a_+(x, y)\gamma_+(x, y)^n + a_-(x, y)\gamma_-(x, y)^n$. Or, comme on a $a_+(1, 1) = 1$, que $\gamma_-(1, 1) = -4$ et que $\gamma_+(1, 1) = 16/3$, alors $|\gamma_-| < \gamma_+$ au voisinage de $(1, 1)$. Ainsi, pour tout n , on a que la série $\hat{F}^\square(t; x, y)$ est un $\Theta(\gamma_+(x, y)^n)$ au voisinage de $(1, 1)$. Et donc, en revenant à (D.33), on a :

$$\Lambda_n(x, y) = \Theta\left((\gamma_+(x, y)/\gamma_+(1, 1))^n\right). \quad (\text{D.45})$$

La reste de la démonstration est strictement identique, mot pour mot, à la preuve du Lemme D.5, à partir de l'équation (D.23). ♦

La fin de la preuve ressemble encore beaucoup à celle de la minoration pour p_n . Si on note $\mathcal{B}_n$ comme l'ensemble des marches tandems S-admissibles (agrégées) de longueur n , qui commencent en $(0, 0)$ et qui restent dans la boîte $\llbracket -n^{2/3}, \lceil n^{2/3} \rceil \rrbracket^2$, on a que $\#\mathcal{B}_n \geq (16/3)^{n+o(n)}$. Pour conclure, il nous faut encore ramener l'étude sur les marches contraintes au quadrant aux marches libres de $\mathcal{B}_n$. Pour cela on considère des marches dont on choisit les premiers et derniers pas.

Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des marches tandems S-admissibles (agrégées) de longueur $n-1$ qui partent de l'origine, qui terminent en $(2,0)$, qui restent dans le quart de plan. On va noter n' le plus petit entier pair qui soit plus grand que $n^{2/3}$, et on note $k_n = 3n' + 18$. On va définir une injection ι de $\mathcal{B}_{n-k_n}$ dans $\mathcal{P}_n$ comme suit ; soit π une marche dans $\mathcal{B}_{n-k_n}$, alors $\iota(\pi)$ est donnée par :

- a. On commence par faire deux pas SE puis un pas $(0, 2n' + 8)$, lui-même suivi de $n' + 4$ pas SE, on se retrouve donc à la coordonnée $(n' + 4, n' + 4)$.
- b. On attache ensuite la marche π dans son intégralité ; puisque π est dans $\mathcal{B}_{n-k_n}$ et qu'on la commence en $(n' + 4, n' + 4)$, alors la marche reste dans $\llbracket 4, 2n' + 8 \rrbracket^2$ (et donc dans le quart de plan).
- c. Soit (i, j) le point atteint après avoir concaténé π , il nous reste encore $k_n - 7 - n'$ pas à faire et il nous faut atteindre $(2,0)$. On cherche déjà à atteindre l'axe des abscisses ; on distingue deux cas :
 - (a) Si j est de la même parité que $k_n - 11 - n'$, alors on ajoute le pas $(-4, k_n - 11 - n' - j)$ (c'est bien défini puisque par définition de k_n on a $k_n - 11 - n' - j \geq 3$) suivi de $k_n - 11 - n'$ pas SE.
 - (b) Sinon, on ajoute un pas $(-3, k_n - 11 - n' - j)$ et qui est suivi de $k_n - 11 - n'$ pas SE.
- d. On est sur l'axe des abscisses en un point $(p, 0)$ avec p pair, et il nous reste 3 pas à faire. On fait un pas $(-p, 2)$ suivis de deux pas SE. On est bien arrivés en $(2, 0)$.

On donne à la figure D.7 une illustration de la construction de $\iota(\pi)$. Comme ι est une injection, on a que $s'_n \geq \#\mathcal{B}_{n-k_n}$ et comme $\#\mathcal{B}_{n-k_n} \geq (16/3)^{n+o(n)}$; de telle sorte qu'on a bien $\liminf s_n^{1/n} \geq 16/3$.

D.3.3 Conjecture d'un équivalent asymptotique pour s_n

De la même manière qu'au paragraphe D.2.3 (p.171), on peut conjecturer un équivalent asymptotique pour s_n . La probabilité que P_n reste dans le quart de plan et termine en $(1, 1)$ est $2 \cdot (3/16)^n s'_{n-1}$. Les points d'arrivées (X_n, Y_n) de P_n sont également de dérive nul et ont une matrice de covariance de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; elles vérifient encore un théorème central limite. Cette fois-ci on a $a = 192/7$ et $b = -1408/63$. On peut donc espérer que la probabilité que P_n reste dans le quart de plan se comporte asymptotiquement comme $c \cdot n^{-1-\pi/\arccos(\xi)}$, où ξ est donné par $\xi = -b/a = 22/27$. On en déduit la conjecture suivante :

Conjecture 2. *Il existe une constante strictement positive c telle que $s_n \sim c \cdot (16/3)^n n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 1 + \pi/\arccos(22/27)$, c'est-à-dire $\alpha \approx 6.08$.*

On peut encore utiliser la méthode de [BRS14] pour démontrer que la constante α dans la conjecture précédente est irrationnelle. Aussi, si elle était vérifiée, on aurait que la série génératrice associée à s_n n'est pas holonome.

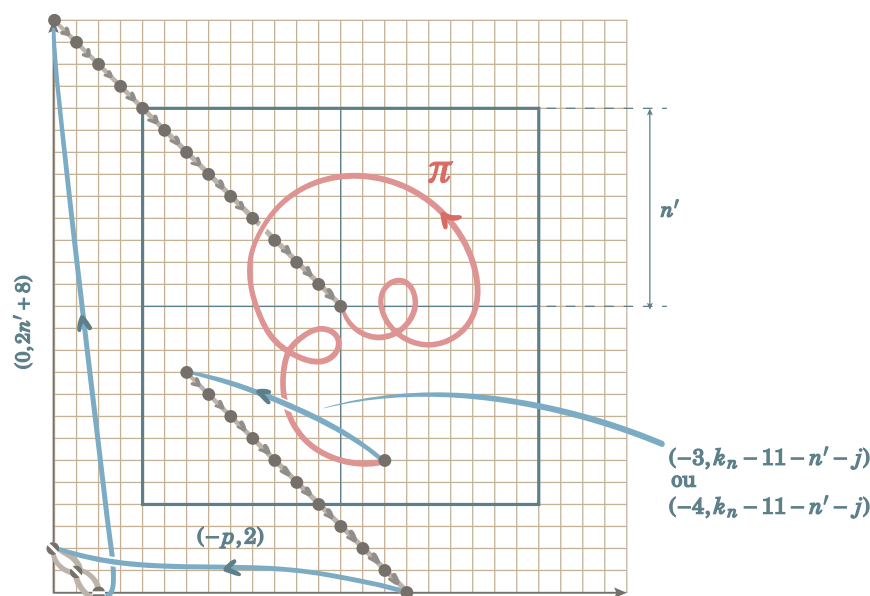


FIGURE D.7 – On construit la marche $\iota(\pi)$ dans $\mathcal{P}_n$ à partir de la marche $\pi \in \mathcal{B}_{n-k_n}$ en lui ajoutant des pas avant (et après) qui permettent de l'éloigner de l'origine (puis de revenir en $(2,0)$).

Conclusion Dans ce chapitre on a démontré des résultats asymptotiques pour l'ensemble des cinq modèles de cartes décorées de notre étude. Pour les posets plans comptés par arêtes ou par sommets, et pour les structures transverses, on a même des équivalents asymptotiques des suites combinatoires associées.

Ces trois équivalents apparaissent tous sous la forme classique $c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}$. Pour le cas des structures transverses, on a un continuum d'exposants critiques $\alpha(v)$ qui tend vers l'infini lorsque le paramètre v tend vers l'infini. L'ensemble de ces équivalents asymptotiques est résumé dans le tableau ci-dessous (où systématiquement on a $\alpha = 1 + \pi/\arccos(\xi)$).

Modèle de carte décorée	Équivalent asymptotique	Énoncé
posets plans par arêtes	$e_n \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha}, \quad \gamma \approx 4.80, \alpha \approx 5.14$ $z_0 \approx 0.54, \xi \approx 0.73$	Prop. D.1, p.160
posets plans par sommets	$v_n \sim c \cdot \gamma^n n^{-\alpha} \sim c \cdot \left(\frac{11+5\sqrt{5}}{2}\right)^n n^{-6}$ $z_0 = (3 - \sqrt{5})/2, \xi = (1 + \sqrt{5})/4$	Prop. D.2, p.162
structures transverses	$t_n(v) \sim c(v) \cdot \gamma(v)^n n^{-\alpha(v)}$ $t_n(0) \sim c(0) \cdot (27/2)^n n^{-7.22\dots}$ $t_n(1) \sim c(1) \cdot ((47 + 13\sqrt{13})/6)^n n^{-8.18\dots}$	Prop. D.3, p.163

De plus, à l'aide de ces équivalents asymptotiques, nous avons pu montrer que les séries génératrices associées aux posets plans comptés par arêtes et aux structures transverses dans le cas triangulés ($v = 0$) et générique ($v = 1$) ne sont pas holonomes.

Pour les orientations polyédrales et les étiquetages de Schnyder nous avons pu déterminer les taux de croissance exponentielle des suites p_n et s_n . En imaginant que l'on puisse disposer d'outils similaires à [BRS14] pour les marches bimodales, nous avons conjecturé des équivalents pour ces deux familles, conjectures qui impliqueraient à nouveau que les séries génératrices associées ne sont pas holonomes.

Modèle de carte décorée	Asymptotique	Énoncé
orientations polyédrales	$\lim p_n^{1/n} = 9/2$	Prop. D.4, p.166
	$p_n \stackrel{?}{\sim} c \cdot (9/2)^n n^{-4.23\dots}$	Conj. 1, p.172
étiquetages de Schnyder	$\lim s_n^{1/n} = 16/3$	Prop. D.6, p.172
	$s_n \stackrel{?}{\sim} c \cdot (16/3)^n n^{-6.08\dots}$	Conj. 2, p.177





Bijection entre posets plans et permutations planes

Sommaire

E.1 Description de la bijection	182
E.2 Démonstration que $h \circ g = \text{Id}$	183
E.3 Réciprocité de g et h à l'aide d'arbres de génération	186
E.3.1 Caractérisation des points actifs	186
E.3.2 Arbre de génération pour les posets plans	187
E.3.3 Comparaison des points actifs sur les arbres de génération	191

Introduction Dans ce dernier chapitre, on part du constat fait à la section C.3 (p.139), où nous avons démontré (Proposition C.2), que le nombre v_n de posets plans à $n + 2$ sommets coïncidait avec le nombre de permutations planes sur un ensemble à n éléments. Nous nous étions alors servis de l'équation fonctionnelle sur la série génératrice associée à $\mathcal{V}_n$ pour démontrer que les deux familles étaient comptées par les mêmes suites.

Le but de ce chapitre est de donner une relation directe entre les posets plans et les permutations planes. On décrira, à la section E.1, comment obtenir, constructivement, un poset plan à partir d'une permutation plane et vice versa. La suite du chapitre sera dédiée à montrer que cette construction définit bien une bijection. À la section E.2, on montre déjà l'injectivité de la construction ce qui permet de conclure sur le caractère bijectif à l'aide du résultat de comptage déjà obtenu. À la dernière section (E.3), on

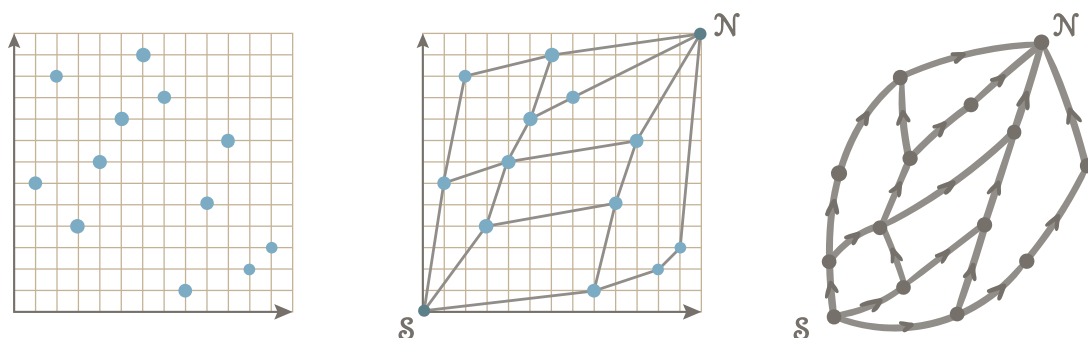


FIGURE E.1 – À gauche la permutation plane $(6, 11, 4, 7, 9, 12, 10, 1, 5, 8, 2, 3)$, et à droite le poset plan $g(\pi)$ construit à l'aide du diagramme de dominance de π .

donne une preuve purement énumérative de la bijectivité, cette fois à l'aide d'arbres de génération.

E.1 Description de la bijection

Si les posets plans ont largement été utilisés tout au long de ce document, on rappelle au/à la lecteur·rice qu'il/elle peut retrouver définition et les premières propriétés concernant les permutations planes dans l'état de l'art au paragraphe III.7 (p.42).

Dans cette section, on décrit les deux sens la bijection entre les posets plans ayant $n + 2$ sommets et les permutations planes sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Des permutations planes vers les posets plans Étant donné n un entier positif ou nul, et π une permutation plane sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on construit son image $g(\pi)$ comme suit (on donne une illustration à la figure E.1). On rappelle que le complété $\bar{\pi}$ est défini comme étant la permutation sur $\llbracket 0, n + 1 \rrbracket$ telle que $\bar{\pi}(0) = 0$, $\bar{\pi}(n + 1) = n + 1$ et $\bar{\pi}(i) = \pi(i)$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$. Clairement, si π est une permutation plane alors $\bar{\pi}$ aussi, et l'image $g(\pi)$ est le poset plan induit par le diagramme de dominance de $\bar{\pi}$. Il s'agit bien d'un poset plan ayant $n + 2$ sommets.

Des posets plans vers les permutations planes Soit maintenant n un entier positif et $\mathcal{P}$ un poset plan à $n + 2$ sommets, on va construire son image $\pi = h(\mathcal{P})$. La construction que l'on donne ici s'inspire notamment d'un algorithme de dessin [TT86]. Soit I l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$ dont on a exclu les pôles S, N , on construit $h(\mathcal{P})$ comme suit (on donne une illustration à la figure E.2) :

- On construit l'arbre droit T_r (resp. l'arbre gauche T_ℓ) de $\mathcal{P}$ comme l'arbre couvrant de $I \cup \{S\}$ où, pour tout sommet de I , on a gardé son arête entrante la plus à droite (resp. la plus à gauche).

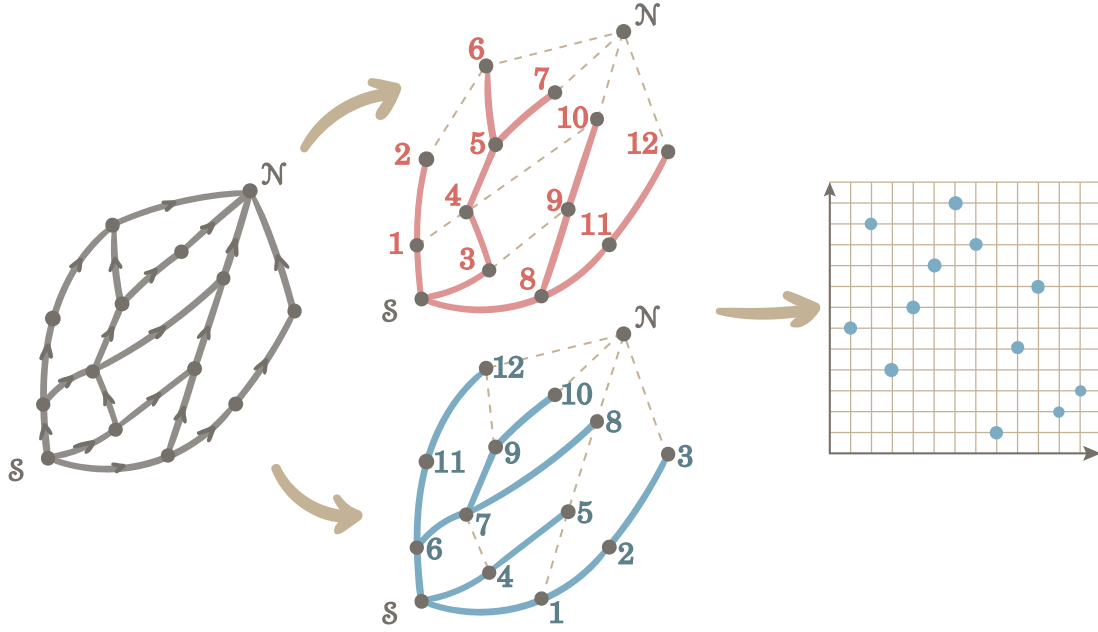


FIGURE E.2 – À gauche un poset plan $\mathcal{P}$, à droite son image $h(\mathcal{P})$. Au centre les deux arbres intermédiaires utilisés pour la construction : en rouge l'arbre du chemin le plus à droite T_r , en bleu l'arbre du chemin le plus à gauche T_ℓ .

- b. Dans T_r (resp. dans T_ℓ), on numérote les sommets $v \in I$ de 1 à n , dans leur ordre de visite du tour de l'arbre réalisé dans le sens horaire (resp. dans le sens anti-horaire). On note $x(v)$ son numéro dans T_r et $y(v)$ celui dans T_ℓ .
- c. On définit $\pi = h(\mathcal{P})$ comme la permutation dont le diagramme est $\{(x(v), y(v)), v \in I\}$. C'est-à-dire qu'on a posé $\pi(x(v)) = y(v)$.

Le but de ce chapitre consiste à démontrer que ces deux constructions définissent une bijection. On veut :

Théorème E.1. *L'application g définit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des permutations planes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et l'ensemble $\mathcal{V}_n$ des posets plans à $n+2$ sommets. Sa réciproque est h .*

La suite du chapitre sera consacrée à donner une démonstration de ce théorème.

E.2 Démonstration que $h \circ g = \text{Id}$

On commence déjà par la partie simple de la démonstration du Théorème E.1, en montrant la proposition suivante :

Proposition E.2. *Pour toute permutation π dans $\mathcal{F}_n$, on a que $h(g(\pi)) = \pi$.*

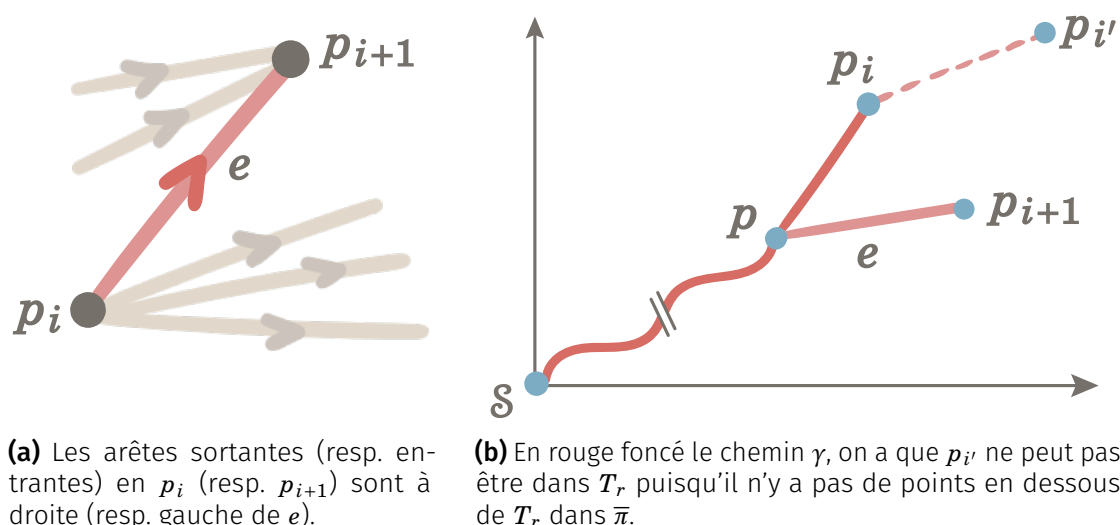


FIGURE E.3 – La situation dans la preuve de la Proposition E.2.

Démonstration. Soient π une permutation plane sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathcal{P} = g(\pi)$ son image par g . On cherche à montrer que $h(\mathcal{P})$ est égal à π . Si i est un entier compris entre 1 et n , on note p_i le point $(i, \pi(i))$ sur le diagramme de π , et on note v_i le point de $\mathcal{P}$ associé à p_i par g . Il s'agit donc de montrer que $x(v_i) = i$ et que $y(v_i) = \pi(i)$. Cela revient à montrer que, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x(v_{i+1}) = x(v_i) + 1$ et $y(v_{i+1}) = y(v_i) + 1$ (c'est déjà le cas pour $(0,0)$ et $\mathcal{S}$). On montera uniquement la récurrence pour x , on peut retrouver le résultat pour y en l'appliquant à π^{-1} .

Déjà, si i définit une montée de π , à savoir que $\pi(i) < \pi(i+1)$, alors on a que $p_i < p_{i+1}$, et donc il y a une arête e entre v_i et v_{i+1} . De plus, comme les sommets p_i et p_{i+1} se suivent, alors e est nécessairement l'arête sortante la plus à gauche de v_i , et l'arête entrante la plus droite de v_{i+1} . On a en particulier que e est dans l'arbre T_r . Aussi, dans le tour autour de T_r , en (b), on a que e est visité juste après v_i et juste avant v_{i+1} ; on a bien que $x(v_{i+1}) = x(v_i) + 1$ (voir figure E.3a).

Maintenant, si i est une descente de π , à savoir que $\pi(i) > \pi(i+1)$, alors on note γ le chemin qui va de $\mathcal{S}$ jusqu'à v_i dans T_r . Dans le diagramme de dominance de π , γ est une ligne brisée qui va de $(0,0)$ jusqu'à p_i ; et, par définition de T_r , il ne peut pas y avoir de point en dessous de γ . Posons p le point de γ le plus à droite et dont l'ordonnée est plus petite que $\pi(i+1)$; soit v le sommet de $\mathcal{P}$ qui correspond à p . Comme l'aire sous γ est sans point, alors il y a une arête e' qui relie v à v_{i+1} , et c'est même l'unique arête entrante de v_{i+1} ; e' est donc dans T_r (voir figure E.3b). Aussi, pour conclure que v_{i+1} est bien visité juste après v_i , il reste à montrer que v_i est une feuille de T_r .

Supposons, par l'absurde, v_i n'est pas une feuille de T_r , alors notons v' un de ses enfants et $p_{i'}$ le point correspondant. À noter qu'on a nécessairement $i' \geq i+2$ puisque le point p_{i+1} est d'ordonnée plus petit que p_i . Mais il ne peut pas y avoir de point

sous l'arête $(p_i, p_{i'})$, ce qui contredit le fait que $\pi(i+1) < \pi(i)$. Aussi, v_i est une feuille de T_r et on a bien montré que $x(v_{i+1}) = x(v_i) + 1$. Ce qui achève la démonstration. ♦

Remarque 61. La distinction de cas que nous avons réalisée dans la preuve de la Proposition E.2 permet de constater que le nombre de descentes de π correspond au nombre de feuilles moins une de l'arbre T_r qui lui est associé. En effet, pour tout i entre 1 et $n-1$, il y a une descente en i si et seulement si v_i est une feuille ; mais le tout dernier sommet visité, lui, est nécessairement une feuille sans être associé à une descente.

De manière analogue, le nombre de descentes de la réciproque π^{-1} compte le nombre de feuilles moins une dans T_ℓ .

Sur la propriété que $g \circ h = \text{Id}$

À partir de là, il est déjà possible de conclure de la réciprocité des deux applications, en effet on a le résultat suivant qui est dû à [BTT92] :

Proposition E.3 ([BTT92]). *Si $\mathcal{B}$ est un poset plan, alors son image $h(\mathcal{B})$ est une permutation plane, et on a que $g(h(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.*

Remarque 62. Notons $\leq$ l'ordre partiel induit par $\mathcal{B}$ sur l'ensemble de ses sommets (voir paragraphe II.2). Par ailleurs $\mathcal{B}$ induit un autre ordre sur ses sommets, appelé *ordre de gauche à droite*, que l'on notera λ et qui se définit comme suit. Soient u, v deux sommets de $\mathcal{B}$ qui ne sont pas des pôles, alors on notera $u \lambda v$ lorsque v est à gauche de n'importe quel chemin qui va de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{N}$ et qui passe par u . À noter que dans ce cas-là, u est à droite de n'importe quel chemin qui va de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{N}$ et qui passe par v . Alors, on a que λ est un ordre *conjugué* de $\leq$, c'est-à-dire que deux sommets u, v sont comparables pour un et seul des deux ordres $\leq$ et λ . Aussi, en notant $\bar{\lambda}$ l'ordre renversé de λ , on a que les deux ordres $\text{Ordre}_x = \leq \cup \lambda$ et $\text{Ordre}_y = \leq \cup \bar{\lambda}$ sont des ordres totaux sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}$. Comme l'intersection de ces deux ordres est $\leq$, alors $\mathcal{B}$ est de dimension de Dushnik-Miller au plus 2.

La démonstration de la Proposition E.3, donnée dans [TT86], consiste alors à s'assurer que l'on a bien un dessin planaire lorsque l'on place chaque sommet v à l'abscisse (resp. l'ordonnée) donné par son rang dans Ordre_x (resp. dans Ordre_y), et en plaçant $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N}$ respectivement en bas à droit et en haut à gauche (les arêtes étant alors des segments rectilignes). Par ailleurs, [TT86, Lemme 2] montre que cette construction coïncide avec celle donnée par g , c'est-à-dire que Ordre_x (resp. Ordre_y) définit le même ordre que le tour horaire de T_r (resp. que le tour anti-horaire de T_ℓ). On peut alors donner une démonstration alternative de la Proposition E.2 (p.183) :

preuve de la Proposition E.2. Soient π une permutation plane et $B = h(\pi)$ son image. Alors d'après la Remarque 62, il est suffisant de montrer la propriété suivante : si p, q sont deux points de π tels que p a une abscisse (resp. une ordonnée) plus petite que q , alors les sommets correspondants v_p, v_q dans B vérifient que $v_p \leq v_q$ ou que $v_p \lambda v_q$ (resp. que $v_p \leq v_q$ ou que $v_p \bar{\lambda} v_q$). Les deux versions de la propriété étant similaires,

on se contente de le montrer pour la question des abscisses ; supposons donc que p a une abscisse plus petite que q . Si par ailleurs p a également une ordonnée plus petite que q , alors on a $v_p \leq v_q$. Si, au contraire, p a une ordonnée plus grande que q , alors p et q ne peuvent pas être comparables pour $\leq$ puisque $\leq$ est la relation de dominance. Dans ce cas, q est dans le quadrant en bas à droite de p , de telle sorte que q est nécessairement à droite de tout chemin qui part de $\mathcal{S}$ pour aller en $\mathcal{N}$ et qui passe par p ; on a donc $v_p \lambda v_q$. ♦

E.3 Réciprocité de g et h à l'aide d'arbres de génération

La preuve que l'on donne ici s'inspire largement de celle donnée dans [BBF08] et qui met en bijection les permutations de Baxter avec les orientations bipolaires planes. Dans un premier temps on donne une caractérisation des sommets actifs d'une permutations planes (paragraphe E.3.1). Par la suite, on décrit un arbre de génération pour les posets plans et on montre qu'il coïncide avec l'arbre de génération déjà connu pour les permutations planes, induisant ainsi une *bijection canonique* entre les deux familles (paragraphe E.3.2). Enfin, on utilise la caractérisation obtenue au premier paragraphe, pour montrer que cette bijection canonique n'est autre que g (paragraphe E.3.3).

E.3.1 Caractérisation des points actifs

En nous rappelant la définition de point actif pour le diagramme de dominance d'une permutation plane (voir paragraphe III.7 et figure 31, p.45), on donne une caractérisation des points qui ne sont pas actifs :

Lemme E.4. *Soit π une permutation plane sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors le point $\mathcal{S} = (0, 0)$ est toujours actif, et un point p de π est actif si et seulement s'il n'apparaît pas comme l'élément de gauche d'un motif 213 de π .*

Démonstration. Premièrement, on a bien que $\mathcal{S}$ est toujours actif puisque la valeur $a = 1$ l'est bien, en effet il n'est pas possible de faire apparaître un motif 2143 en insérant le point $(n + 1, 1)$. On montre l'équivalence par double implication.

Supposons que le point p soit l'élément de gauche d'un motif 213 dans π , alors il devient un motif 2143 dans π_p^{-1} (voir figure E.4). Comme vu à la Proposition 12 (p.44), c'est équivalent à avoir π_p non plane.

Réciproquement, si p n'est pas un point actif, alors ni π_p ni π_p^{-1} ne sont des permutations planes. Alors l'ajout du point p crée un motif 2143 dans π_p^{-1} , et le point p correspond à l'élément 1 du motif. Aussi, dans π , le motif formé par les trois points d'abscisse inférieure ou égale à n est 213, avec p comme élément de gauche. ♦

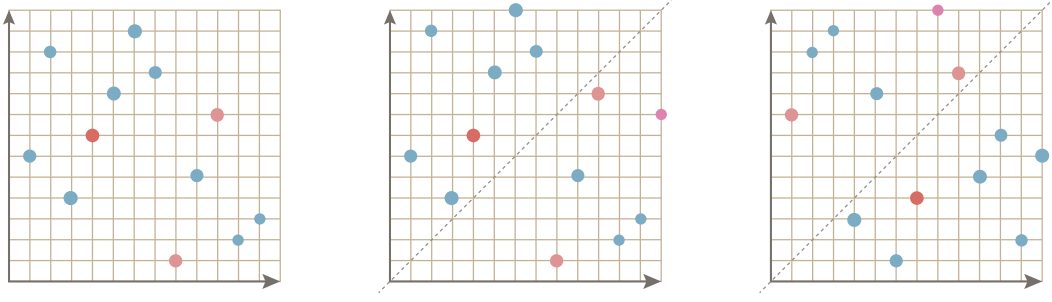


FIGURE E.4 – À gauche une permutation plane π qui contient un motif 213 (en rouge) et qui commence par p (en rouge foncé). Au centre la permutation π_p avec en rouge le point ajouté. À droite la réciproque π_p^{-1} qui fait apparaître un motif barré.

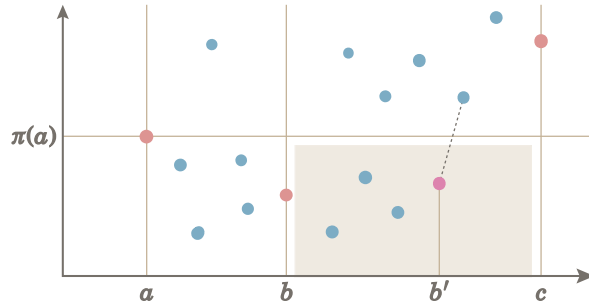


FIGURE E.5 – Le point b' est pris comme étant le point le plus à droite dans la zone grise donnée par $\{b \leq i < c, \pi(i) < \pi(a)\}$.

Remarque 63. Si $(a, \pi(a))$ est l'élément de gauche d'un motif 213, alors il est aussi l'élément de gauche d'un motif barré $2\underline{1}3$. En effet, si les éléments du motif 213 sont $(a, \pi(a)), (b, \pi(b))$ et $(c, \pi(c))$, de gauche à droite. Alors on peut considérer le point $(b', \pi(b'))$ donné par $b' = \max\{i, b \leq i < c, \pi(i) < \pi(a)\}$. On a que $(a, \pi(a)), (b', \pi(b'))$ et $(b' + 1, \pi(b' + 1))$ définissent un motif barré $2\underline{1}3$ (voir figure E.5).

On se servira de ce lemme au paragraphe sous-section E.3.3 (p.191) pour montrer que les points actifs correspondent entre l'arbre de génération des permutations planes et celui des posets plans.

E.3.2 Arbre de génération pour les posets plans

On commence par donner une règle de succession pour l'arbre de génération des permutations planes, on donne aussi quelques éléments de terminologie.

Soient π dans $\mathcal{F}_n$ et $p_1, \dots, p_{h+k}$ les points actifs de $\bar{\pi}$ triés par ordonnée décroissante (on a donc $S = p_{h+k}$), on nommera $p_1, \dots, p_h$ les *points actifs-hauts*, c'est-à-dire ceux au-dessus du point de plus à droite $(n, \pi(n))$ (on a donc $p_h = (n, \pi(n))$). On dira

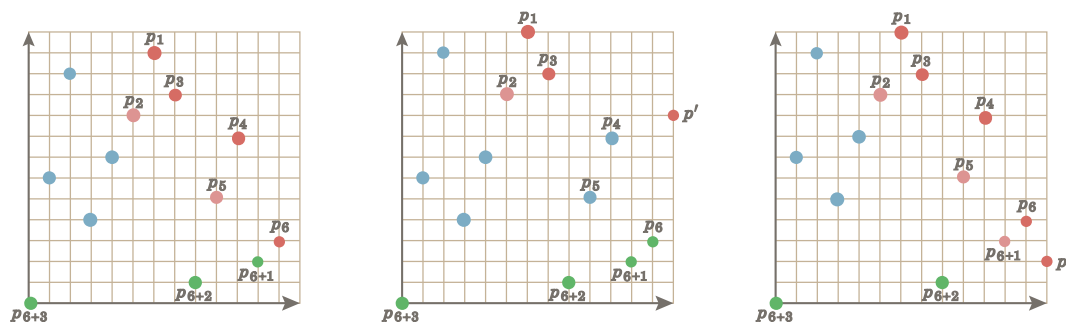


FIGURE E.6 – À gauche la permutation plane dont on part; on marque en rouge les points actifs-hauts, et en vert les points actifs-bas. Les nouveaux points actifs-hauts de π' sont $p_1, \dots, p_{j-1}, p'$. Les points actifs-bas de π' sont : $p_h, \dots, p_{h+k}$ lorsque $j \leq h$ (au centre); et $p_j, \dots, p_{h+k}$ lorsque $j > h$ (à droite).

que les points actifs $p_{h+1}, \dots, p_{h+k}$ sont les *points actifs-bas* de π .

Si j est un entier dans $\llbracket 1, h+k \rrbracket$, alors on note $\pi' = \pi_{p_j}$, le j -ième enfant de π dans l'arbre de génération décrit au paragraphe III.7. Soit p' le nouveau point ajouté à π dans π' . Alors, et comme cela est montré par [Bou+18], les points actifs-hauts de π' sont $p_1, \dots, p_{j-1}, p'$. De même les points actifs-bas de π' sont : $p_h, \dots, p_{h+k}$ lorsque $j \leq h$; et $p_j, \dots, p_{h+k}$ lorsque $j > h$ (voir figure E.6). Dit autrement (voir [Bou+18, Prop. 5]), si on assigne à chaque permutation plane un couple (h, k) qui compte le nombre h (resp. k) de points actifs-hauts (resp. actifs-bas), alors l'arbre de génération des permutations planes est isomorphe à l'arbre donné par la règle de succession :

$$\Omega = \begin{cases} (1, 1) \\ (h, k) \rightsquigarrow (1, k+1), \dots, (h-1, k+1), (h, k+1) \\ (h+1, k), \dots, (h+k, 1). \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Descriptions des parents d'un poset plan On décrit à présent l'arbre de génération pour les posets plans comptés par sommets. Soient donc n un entier strictement positif et $\mathcal{P}'$ un élément de $\mathcal{V}_{n+1}$, on va déjà décrire comment obtenir le parent $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}'$. Soit $e' = (u', \mathcal{N})$ la dernière arête le long du bord latéral droit de la face extérieure de $\mathcal{P}'$. Par la suite on dira que e' est l'*arête haute-droite* de $\mathcal{P}'$, et que u' est son *sommet haut-droit*. Soit $\mathcal{P}'/e'$ l'orientation bipolaire plane obtenue à partir de $\mathcal{P}'$ en contractant l'arête e' (ce n'est *a priori* pas un poset plan). On remarque que toutes les faces internes ont le même type dans $\mathcal{P}'/e'$ et dans $\mathcal{P}'$, à l'exception de la face f qui se trouve à gauche de e' . En effet si f est de type (i, j) dans $\mathcal{P}'$ alors elle est de type $(i, j-1)$ dans $\mathcal{P}'/e'$.

Aussi $\mathcal{P}'/e'$ est un poset plan si et seulement si f est la face extérieure ou si f est de type (i, j) avec $j \geq 2$. Dans ce cas-là, on définit le parent $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}'$ par $\mathcal{P} = \mathcal{P}'/e'$ (voir figure E.7, dessin de gauche). Si, au contraire, f est une face interne de type $(i, 1)$, alors le bord latéral droit de f dans $\mathcal{P}'/e'$ est réduit à une seule arête ε . On définit le

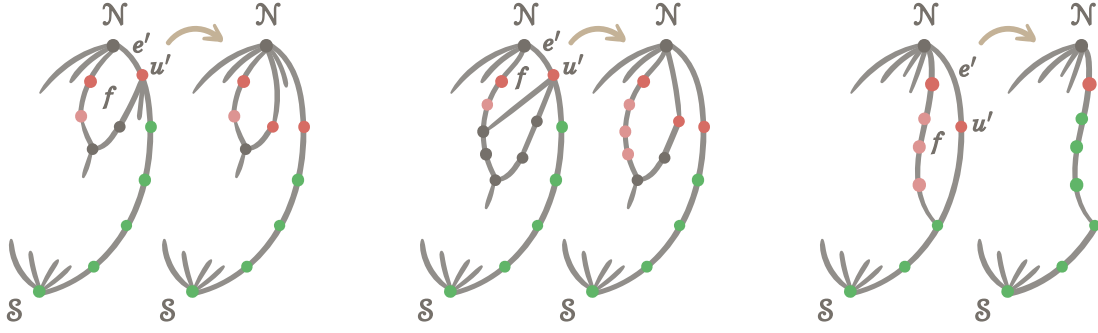


FIGURE E.7 – Les trois cas de figures possibles pour les couples enfant $\rightarrow$ parent, dans l'arbre de génération des posets plans.

parent $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}'$ comme étant $\mathcal{P} = (\mathcal{P}'/e') \setminus \varepsilon$, où on a supprimé l'arête ε (voir figure E.7, dessins du centre et de droite).

Description des enfants d'un poset plan Avant de décrire les enfants d'un poset plan $\mathcal{P} \in \mathcal{Z}_n$, on donne quelques éléments de terminologie. On note $q_1, \dots, q_{s+1}$ les sommets voisins au pôle Nord N et ordonnées de gauche à droite (aussi q_{s+1} est le sommet haut-droit de $\mathcal{P}$). Ces sommets $q_1, \dots, q_{s+1}$ sont appelées les *quasi-max* de $\mathcal{P}$. De même les faces internes $f_1, \dots, f_s$ incidentes à N sont appelées les *faces hautes* de $\mathcal{P}$ (s peut être nul); de telle sorte que f_i est la face interne à droite de l'arête (q_i, N) . Les *sommets actifs-hauts* de $\mathcal{P}$ sont les sommets qui sont strictement sur le bord latéral gauche des faces hautes, en plus du sommet $u = q_{s+1}$ qui sera également un sommet actif-haut. Enfin, les *sommets actifs-bas* seront les sommets qui se trouvent sur le bord latéral droit de la face extérieure de $\mathcal{P}$, à l'exception de u et N (en incluant S , donc). On illustre ces nouvelles définitions à la figure E.8.

On décrit à présent les enfants de $\mathcal{P}$ dans l'arbre de génération. Pour chaque sommet actif (haut ou bas) v de $\mathcal{P}$, on va construire un enfant $\mathcal{P}_v$ de $\mathcal{P}$. On distingue selon trois cas :

- Si v est un sommet quasi-max q_i (avec $i \in \llbracket 1, s+1 \rrbracket$), alors on construit $\mathcal{P}_v$ comme suit (voir figure E.9, dessin (i)). On ajoute un nouveau sommet u' , qui devient le nouveau sommet haut-droit, dont la seule arête sortante est dirigée vers N , et où on a redirigé toutes les arêtes sortantes des quasi-maxs $q_i, \dots, q_{s+1}$ vers u' . Ainsi, les nouveaux voisins de N sont, de gauche à droite : $q_1, \dots, q_{i-1}, u'$.
- Si v est un sommet actif-haut mais qui n'est pas un quasi-max de $\mathcal{P}$ (voir figure E.9, dessin (ii)). Soit f_i la face haute telle que v soit (strictement) sur le bord latéral gauche de f_i . Alors on construit un nouveau sommet u' , qui devient le nouveau sommet haut-droit, dont la seule arête sortante est dirigée vers N , où on a ajouté une arête (v, u') et où on a redirigé toutes les arêtes sortantes des quasi-maxs $q_{i+1}, \dots, q_{s+1}$ vers u' . Ainsi, les nouveaux voisins de N sont, de gauche à droite : $q_1, \dots, q_i, u'$.

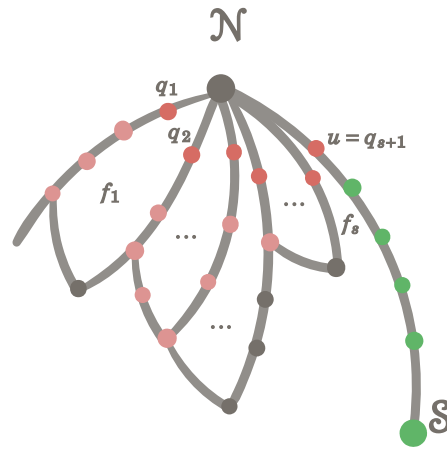


FIGURE E.8 – En rouge (clair ou foncé) les sommets actifs-hauts, en rouge foncé les sommets quasi-max (qui donc également des sommets actifs-haut), et en vert les sommets actifs-bas.

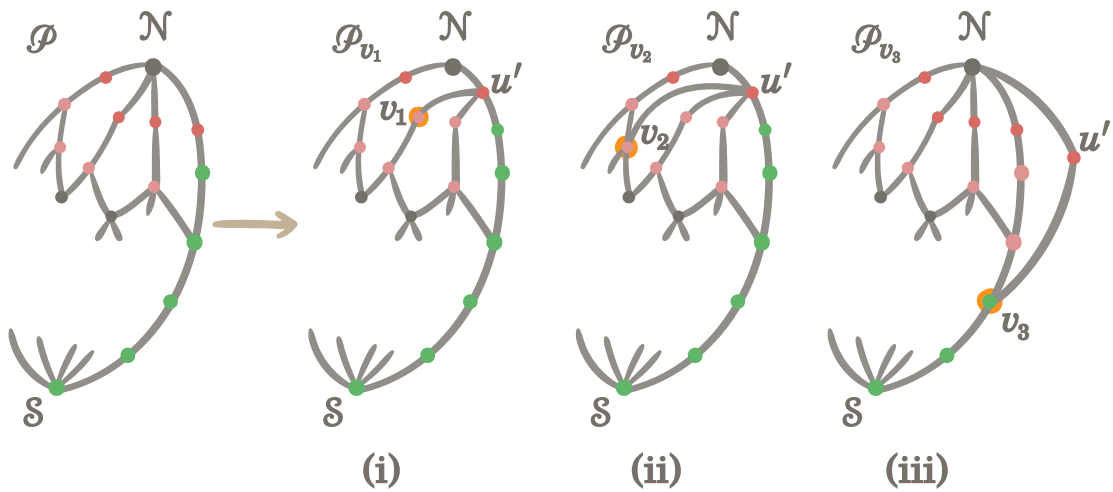


FIGURE E.9 – À gauche un poset plan $\mathcal{P}$ et à sa droite trois de ses enfants $\mathcal{P}_{v_1}, \mathcal{P}_{v_2}$ et $\mathcal{P}_{v_3}$. associés aux sommets v_1, v_2 et v_3 qui sont respectivement : un sommet actif-haut qui est un quasi-max, un sommet actif-haut qui n'est pas un quasi-max, et un sommet actif-bas.

- c. Enfin, si v est un sommet actif-bas de $\mathcal{P}$, alors on construit $\mathcal{P}_v$ en ajoutant un chemin de longueur 2 : $(v, u')(u', \mathcal{N})$, qui relie v à $\mathcal{N}$ (voir figure E.9, dessin (iii)). À nouveau u' est le nouveau sommet haut-droit de $\mathcal{P}$.

En regardant cas par cas les figures E.7 et E.9, on a le résultat suivant :

Lemme E.5. *Soient $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{V}_n$ et v un sommet actif (haut ou bas) de $\mathcal{P}$, alors le parent de $\mathcal{P}_v$ est $\mathcal{P}$. Réciproquement, si $\mathcal{P}'$ est dans $\mathcal{V}_{n+1}$ et que $\mathcal{P}$ est le parent de $\mathcal{P}'$; on note v le sommet de $\mathcal{P}$ qui correspond au voisin entrant le plus à gauche du sommet haut-droit de $\mathcal{P}'$. Alors on a que v est un sommet actif dans $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_v$.*

Soit $\mathcal{P}$ un poset plan, on note h (resp. k) le nombre de sommets actifs-hauts (resp. actifs-bas) de $\mathcal{P}$. Alors on note $v_1, \dots, v_h$ les sommets actifs-hauts, listés dans l'ordre suivant : on prend les sommets actifs-hauts strictement sur le bord latéral gauche de f_1 pris de haut en bas, puis ceux de f_2 , ainsi de suite en ajoutant $v_h = u$ à la fin. On note également $v_{h+1}, \dots, v_{h+k}$ les sommets actifs-bas pris de haut en bas sur le bord latéral droit de la face extérieure de $\mathcal{P}$. On dira que cet ordre est l'ordre descendant sur les sommets actifs de $\mathcal{P}$, on peut l'observer à la figure E.10.

On peut constater, en regardant la figure E.9, que les sommets actifs-hauts de $\mathcal{P}_{v_j}$ sont $v_1, \dots, v_{j-1}, u'$ (où u' est le nouveau sommet haut-droit de $\mathcal{P}_{v_j}$). De même, les sommets actifs-bas de $\mathcal{P}_{v_j}$ sont : $v_h, \dots, v_{h+k}$ lorsque $j \leq h$; et $v_j, \dots, v_{h+k}$ lorsque $j > h$. Aussi, si on assigne à chaque poset plan le couple (h, k) qui compte son nombre h (resp. k) de sommets actifs-hauts (resp. actifs-bas), alors on retrouve la règle de succession donnée à l'équation (E.1). Aussi on a le résultat suivant :

Proposition E.6. *L'ensemble $\mathcal{V} = \bigcup_n \mathcal{V}_n$ des posets plans est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ des permutations planes, via la règle de succession donnée à l'équation (E.1). La bijection induite entre $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{V}_n$ est appelée la bijection canonique.*

Le but, à présent, est de montrer que la bijection g coïncide avec la bijection canonique. Ce qu'on fait dans le dernier paragraphe.

E.3.3 Comparaison des points actifs sur les arbres de génération

Dans ce paragraphe, on montre que les notions de points actifs qu'on a défini coïncident dans les deux arbres de génération. On conclut enfin la démonstration énumérative du Théorème E.1.

Lemme E.7. *Soit π une permutation plane sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors les sommets actifs de $g(\pi)$ coïncident avec les points actifs du diagramme $\bar{\pi}$. De plus, l'ordre descendant sur les sommets actifs de $g(\pi)$ correspond à l'ordre descendant (par ordonnée décroissante) sur les points actifs de $\bar{\pi}$ (voir figure E.10).*

Démonstration. Soit déjà p un point de π qui n'est pas actif, on va montrer que le sommet v qui correspond à p dans $g(\pi)$ n'est pas non plus actif. Par le Lemme E.4 (p.186), on a que p apparaît comme l'élément de gauche d'un motif 213 de π . Comme

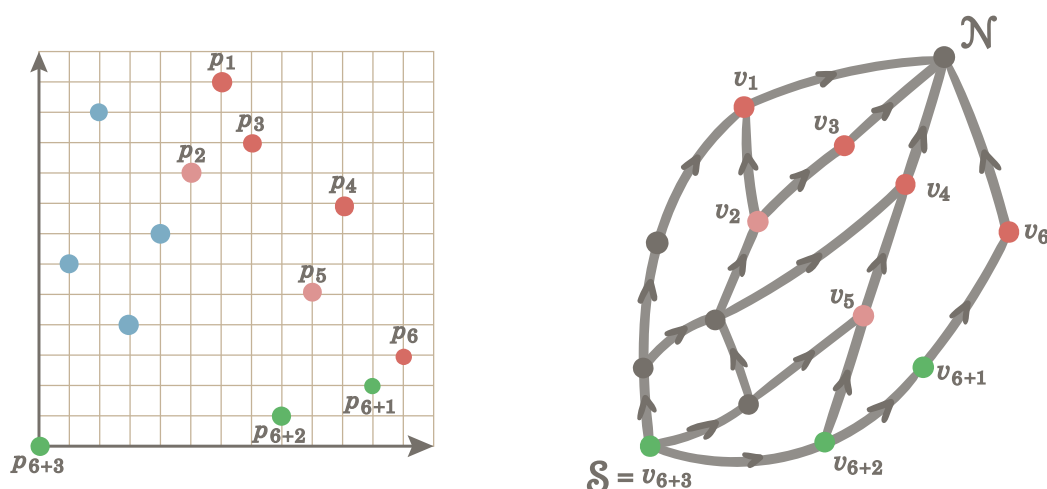


FIGURE E.10 – On a une correspondance entre les points actifs de π (à gauche) et les sommets actifs de $h(\pi)$ (à droite).

vu à la Remarque 63 (p.186), on a que p est même le premier élément d'un motif barré $2\bar{1}3$ dans π , que l'on note p, p', p'' . On note e l'arête qui relie p' à p'' dans $g(\pi)$ (e existe bien car $p' < p''$ et que p' et p'' sont consécutifs). Aussi, comme p est dominé par p'' mais pas par p' , alors le chemin le plus à droite ϑ (c'est-à-dire celui qui prend toujours la sortante la plus à droite) et qui part de p doit nécessairement toucher p'' . De plus, on a que ϑ arrive en p'' avec l'arête e à droite de ϑ , puisque sinon $p < p'$. Or, si v devait être un sommet actif de $g(\pi)$, alors il n'y aurait aucune arête entrante sur la droite ϑ avant d'arriver en $\mathcal{N}$, compte tenu de la définition des sommets actifs. Aussi v n'est pas un sommet actif.

Maintenant, si on suppose que p est un point actif de π , alors on veut montrer que le sommet correspondant v est lui aussi actif. Soit à nouveau ϑ le chemin qui part de v et qui prend systématiquement l'arête sortante la plus à droite. Pour montrer que v est actif il suffit de montrer que ϑ ne voit pas d'arête entrante en ϑ par sa droite, avant d'arriver en $\mathcal{N}$ (puisque le chemin le plus à droite longe alors le bord latéral gauche d'une face incidente à $\mathcal{N}$, ou le bord latéral droit de la face extérieure). Supposons donc, par l'absurde, que ϑ passe par un point $p'' \neq \mathcal{N}, p'' \neq p$ qui admet une arête entrante $e = (p', p'')$ qui se trouve à droite de ϑ . Comme on considère le chemin le plus à droite partant de p , on a que $p \not< p'$. Par ailleurs, comme $g(\pi)$ est un poset plan, et n'a donc pas d'arête transitive, on a aussi $p' \not< p$. On a donc bien que p, p' et p'' forment un motif 213 où soit p soit p' est l'élément le plus à gauche. Or si p' était l'élément le plus à gauche on aurait que e touche ϑ par la gauche (car $p' < p$). Aussi p est l'élément le plus à gauche du motif 213 et, par le Lemme E.4, il n'est pas actif, ce qui est une contradiction. On a donc bien montré que v est un sommet actif.

Enfin, il reste à vérifier que l'ordre descendant sur les sommets actifs de $g(\pi)$ correspond à l'ordre descendant sur l'ordonnée des points actifs de $\bar{\pi}$. On constate

que les quasi-max $q_1, \dots, q_{s+1}$ de $g(\pi)$, ordonnés de gauche à droite, correspondent aux *right-to-left maximas* de π , ordonnées par abscisse croissante et ordonnée décroissante. Si $f_1, \dots, f_s$ sont les faces hautes de $g(\pi)$, ordonnées de gauche à droite, alors les sommets sur le bord latéral gauche de f_i sont dominés par q_i mais pas par q_{i+1} ; aussi tout ces sommets sont d'ordonnée comprise entre celle de q_{i+1} et celle de q_i . En ce qui concerne les sommets actifs-bas, ils sont tous dominés par q_{s+1} et sont donc d'ordonnée inférieure à l'ordonnée de q_{s+1} . On a donc bien que les deux ordres coïncident. ♦

On conclut enfin la démonstration énumérative de la bijectivité de g . On a le résultat suivant :

Proposition E.8. *L'application g coïncide avec la bijection canonique entre l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des permutations planes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et l'ensemble $\mathcal{V}_n$ des posets plans à $n + 2$ sommets.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence ; la démonstration étant vide pour $n = 0$, on la suppose vraie au rang n et on cherche à le démontrer pour le rang $n + 1$. Soit donc π une permutation plane dans $\mathcal{F}_n$, qui admet h (resp. k) points actifs-hauts (resp. actifs-bas). On les écrit $p_1, \dots, p_{h+k}$ par ordonnée décroissante dans $\bar{\pi}$. Par hypothèse de récurrence, on a que $\mathcal{P} = g(\pi)$ est également l'image de π par la bijection canonique ; c'est-à-dire que π et $\mathcal{P}$ se trouvent au même endroit dans leurs arbres de génération respectifs. De plus, par le Lemme E.7, les points actifs $p_1, \dots, p_{h+k}$ correspondent aux sommets actifs $v_1, \dots, v_{h+k}$ de $\mathcal{P}$ listés dans l'ordre descendant. Dans la suite de la preuve on va poser $q_1, \dots, q_s$ les quasi-max de $\mathcal{P}$ pris de gauche à droite et $f_1, \dots, f_s$ ses faces hautes. Il reste maintenant à montrer que pour tout j dans $\llbracket 1, h + k \rrbracket$, on a $g(\pi_{p_j}) = \mathcal{P}_{v_j}$.

Si p_j est un sommet actif mais n'est pas un quasi-max. Soit f_i la face qui admet v_j sur son bord latéral gauche, et soit p' le point ajouté à π dans π_{p_j} , voir figure E.11. Pour montrer qu'on a bien $g(\pi_{p_j}) = \mathcal{P}_{v_j}$, il s'agit de vérifier que les voisins entrants dans p' dans $g(\pi_{p_j})$ sont bien $p_j, q_{i+1}, \dots, q_{s+1}$. Si on note y' l'ordonnée de p_j , alors cela revient à montrer que $p_j, q_{i+1}, \dots, q_{s+1}$ sont les *right-to-left maximas* de $\pi|_{y \leq y'}$ ce qui découle du Lemme E.7 et du fait que $q_{i+1}, \dots, q_{s+1}$ étaient déjà les *right-to-left maximas* de π .

On montre que $g(\pi_{p_j}) = \mathcal{P}_{v_j}$ pour les autres cas de points actifs de manière très similaire. ♦

Conclusion Dans ce chapitre, on a donné une description d'une bijection g entre les permutations planes sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ et les posets plans à $n + 2$ sommets. On a également décrit la bijection réciproque h à l'aide d'un étiquetage des arbres droits et arbres gauches du poset plan.

Après avoir décrit la bijection, on a donné une démonstration énumérative de la réciprocité de g et h . Pour ce faire, nous avons décrit un arbre de génération pour

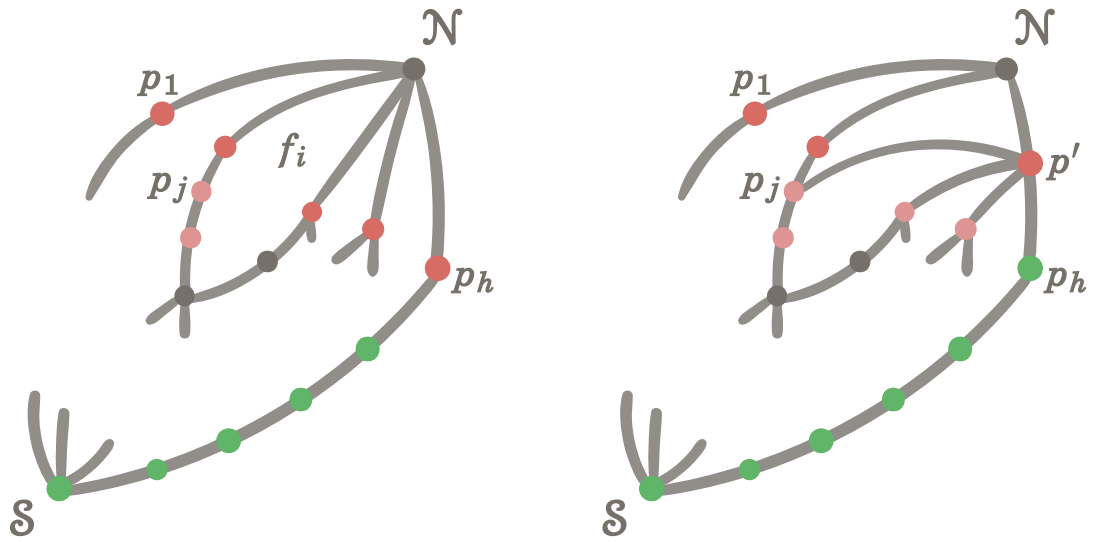


FIGURE E.11 – La situation dans la preuve de la Proposition E.8. On a $g(\pi)$ à gauche et $g(\pi_{p_j})$ à droite.

les posets plans et nous avons montré qu'il coïncidait avec l'arbre de génération déjà connu pour les permutations planes, induisant une *bijection canonique* entre les deux familles. On a ensuite montré que l'application g se confondait avec cette bijection canonique.

Conclusion

Contributions et perspectives

Tout au long de cette thèse, nous avons présenté plusieurs résultats énumératifs et bijectifs en relation avec des cartes planes décorées et à l'aide de bijections avec des marches dans le quart de plan.

Énumération asymptotique Une de nos principales contributions concerne sans doute l'énumération asymptotique et nous avons pu mettre en évidence trois nouveaux équivalents pour les modèles considérés. Pour le nombre $t_n(0)$ de structures transverses triangulées ayant $n + 4$ sommets, une conjecture avait été énoncée pour le coefficient de croissance [ITF09] et une majoration optimale avait été donnée ($t_n(0) \leq 13.5^{n-1}$, voir [TFI09]). Nous validons cette conjecture en donnant même un équivalent :

$$t_n(0) \sim c \cdot \left(\frac{27}{2}\right)^n n^{-1 - \frac{\pi}{\arccos(7/8)}}.$$

Par ailleurs, nous montrons que la série génératrice associée n'est pas holonome. En ce qui concerne le nombre v_n de posets plans comptés par sommets et la suite e_n qui compte les posets plans par arêtes, nous avons obtenu que les deux équivalents asymptotiques suivants (Proposition D.2, p.162 et Proposition D.1, p.160) :

$$v_n \sim ((11 + 5\sqrt{5})/2)^n n^{-6} \quad e_n \sim c \cdot (4.80\dots)^n n^{-5.14\dots}$$

Où, pour e_n , les coefficients qu'on a approximés sont algébriques. Par ailleurs, on a aussi montré que la série des e_n n'est pas holonome.

Le cas des structures transverses est un peu particulier, puisque nous avons introduit la variable v , qui marque le nombre de faces carrées $\mathfrak{T}_q$: ainsi, en plus de compter asymptotiquement le nombre $t_n(0)$ de structures transverses triangulés, nous avons également pu donner un équivalent de $t_n(v)$ quel que soit $v \geq 0$ (voir Proposition D.3, p.163) et on obtient une formule simple dans le cas générique $v = 1$. En effet on a que $t_n(1) \sim c \cdot \gamma(1)^n n^{-1 - \pi/\arccos(\xi(1))}$, avec $\gamma(1) = \frac{47+13\sqrt{13}}{6}$ et $\xi(1) = \frac{29+\sqrt{13}}{36}$.

Pour nos deux derniers modèles, on ne parvient pas à donner d'équivalent asymptotique, mais on arrive toutefois à fournir un coefficient de croissance. On trouve que le nombre p_n des orientations polyédrales ayant n sommets internes vérifie $\lim p_n^{1/n} = 9/2$. De même, on a pour le nombre s_n d'étiquetages de Schnyder avec n faces internes, que $\lim s_n^{1/n} = 16/3$. En outre, on conjecture des équivalents asymptotiques pour ces deux suites (conjectures 1, p.172 et 2, p.177) et on conjecture également que les séries associées ne sont pas holonomes.

Les perspectives concernant l'énumération asymptotique sont donc sans doute à aller chercher de ce côté. En effet, et comme nous l'avons vu aux paragraphes D.2.3 et D.3.3, il est possible de donner un théorème central limite pour les marches tandems P-admissibles et S-admissibles : la marche (X_n, Y_n) repondérée vérifie que

la marche renormalisée $(X_n/\sqrt{n}, Y_n/\sqrt{n})$ converge en loi vers une distribution normale bidimensionnelle, centrée en $(0,0)$ et de covariance donnée. Le seul *hic*, c'est qu'il nous est impossible d'appliquer la méthode de D. Denisov et V. Wachtel [DW15], compte tenu du caractère bimodal de la marche (X_n, Y_n) . Pour rappel, l'ensemble des pas permis dans les marches tandems P-admissibles et S-admissibles, dépend de la parité de la hauteur y à laquelle on se trouve.

Il faudrait donc examiner dans le détail la preuve de [DW15] et identifier les points où une extension au cas bimodal (avec un théorème central limite, comme dans notre cas) peut poser une difficulté. Notons que par exemple que [DW15] nécessite déjà plus qu'un théorème central limite : une convergence de la marche sans contrainte de domaine vers un mouvement brownien $2D$ de covariance donnée. Établir un tel résultat de convergence pour nos marches bimodales semble déjà un point potentiellement délicat. Si une telle entreprise venait toutefois à aboutir, nous aurions alors les équivalents asymptotiques pour p_n et s_n :

$$p_n \sim c \cdot (9/2)^n n^{-1-\pi/\arccos(9/16)} \quad s_n \sim c' \cdot (16/3)^n n^{-1-\pi/\arccos(22/27)}. \quad (\text{E.2})$$

Bijection avec des marches dans le quart de plan et énumération exacte La stratégie utilisée pour obtenir ces résultats énumératifs est la suivante. Dans un premier temps, nous avons mis en bijection chacun des modèles de cartes avec des orientations bipolaires planes dont les faces voient leur type contraint et se voient parfois décorées à l'aide d'arêtes transverses. On traduit ensuite cette description sous forme d'orientations bipolaires planes en marches tandems dans le quart de plan à l'aide de la bijection KMSW. Les pas de ces marches sont eux aussi parfois décorés, soit par un poids numérique, soit à l'aide de marches à petits pas.

De ces bijections successives, deux modèles se démarquent : celui des orientations polyédrales et celui des étiquetages de Schnyder. Dans les deux cas, les orientations bipolaires planes obtenues sont biparties (bicoloriables) mais alors les contraintes sur le type d'une face f dépendent de la couleur de sa pointe $\text{top}(f)$. C'est cette dichotomie qui induit des marches bimodales par la suite et qui complique alors l'énumération.

Pour l'ensemble des familles de cartes décorées, et en plus des résultats asymptotiques déjà évoqués, nous fournissons également des énoncés de comptage exacts. En effet, il est possible de déduire des équations fonctionnelles (à partir de notre *équation maîtresse* (C.1)) sur les séries génératrices de nos modèles à partir des bijections avec des marches tandems dans le quart de plan. À chaque fois, nous proposons aussi un découpage des marches tandems en marches à petits pas, qui nous permet de donner des algorithmes en temps polynomial pour calculer les premiers termes des suites combinatoires.

Lien avec des familles de permutations Enfin, en comptant les posets plans par sommets, on observe que la série coïncide avec celle qui compte les permutations

planes (les permutations qui évitent le motif barré $2\bar{1}43$). À l'aide de manipulations algébriques et de l'équation fonctionnelle obtenue, on donne une première preuve de ce résultat (Proposition C.2, p.139). Dans le chapitre E, on donne une preuve constructive pour fournir une bijection entre les posets plans à $n + 2$ sommets et les permutations planes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (théorème E.1, p.183).

Il ne s'agit pas du seul exemple de bijection entre des cartes planes décorées et, par exemple, les orientations bipolaires planes sont elles aussi en bijection avec les permutations de Baxter, qui sont les permutations évitant les motifs barrés $2\bar{4}13$ et $3\bar{1}42$. Comme pour les permutations planes, la bijection fait appel aux diagrammes de Hasse de la permutation. Toutes les familles de cartes décorées que nous avons étudiées dans cette thèse peuvent être décrites à l'aide d'orientations bipolaires planes décorées (cf. le chapitre A), et il pourrait être intéressant de les mettre en relation avec d'autres classes de permutations évitant un motif, en utilisant des stratégies similaires.

Annexes

Bibliographie

- [AH89] Kenneth I. APPEL et Wolfgang HAKEN. *Every planar map is four colorable*. T. 98. American Mathematical Soc., 1989.
- [AP15] Marie ALBENQUE et Dominique POULALHON. « A Generic Method for Bijections between Blossoming Trees and Planar Maps ». en. In : *The Electronic Journal of Combinatorics* (juin 2015), P2.38-P2.38. ISSN : 1077-8926. DOI : [10.37236/3386](https://doi.org/10.37236/3386). URL : <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i2p38> (visité le 03/06/2022).
- [Bat+94] Giuseppe Di BATTISTA et al. « Algorithms for drawing graphs : an annotated bibliography ». en. In : *Computational Geometry* 4.5 (oct. 1994), p. 235-282. ISSN : 09257721. DOI : [10.1016/0925-7721\(94\)00014-X](https://doi.org/10.1016/0925-7721(94)00014-X). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/092577219400014X> (visité le 08/06/2021).
- [Bax01] R. J. BAXTER. « Dichromatic polynomials and Potts models summed over rooted maps ». In : *Annals of Combinatorics* 5.1 (2001). Publisher : Springer, p. 17-36.
- [BB07] Mireille BOUSQUET-MÉLOU et Steve BUTLER. « Forest-Like Permutations ». en. In : *Annals of Combinatorics* 11.3 (déc. 2007), p. 335-354. ISSN : 0219-3094. DOI : [10.1007/s00026-007-0322-1](https://doi.org/10.1007/s00026-007-0322-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s00026-007-0322-1> (visité le 07/06/2021).
- [BB09] Olivier BERNARDI et Nicolas BONICHON. « Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 116.1 (2009). Publisher : Elsevier, p. 55-75.
- [BBF08] Nicolas BONICHON, Mireille BOUSQUET-MÉLOU et Éric FUSY. « Baxter permutations and plane bipolar orientations ». en. In : *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. The International Conference on Topological and Geometric Graph Theory 31 (août 2008), p. 69-74. ISSN : 1571-0653. DOI : [10.1016/j.endm.2008.06.011](https://doi.org/10.1016/j.endm.2008.06.011). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065308000681> (visité le 07/06/2021).

- [BFM07] Nicolas BONICHON, Stefan FELSNER et Mohamed MOSBAH. « Convex drawings of 3-connected plane graphs ». In : *Algorithmica* 47.4 (2007). Publisher : Springer, p. 399-420.
- [BFR21] Mireille BOUSQUET-MÉLOU, Éric FUSY et Kilian RASCHEL. « Plane bipolar orientations and quadrant walks ». en. In : *arXiv :1905.04256 [math]* (fév. 2021). arXiv : 1905.04256. URL : <http://arxiv.org/abs/1905.04256> (visité le 03/06/2021).
- [BG14] Jérémie BOUTTIER et Emmanuel GUITTER. « On irreducible maps and slices ». In : *Combinatorics, Probability and Computing* 23.6 (2014). Publisher : Cambridge University Press, p. 914-972.
- [Bon05] Nicolas BONICHON. « A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing Dyck paths ». en. In : *Discrete Mathematics. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics 2002 (FPSAC'02)* 298.1 (août 2005), p. 104-114. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/j.disc.2004.01.021](https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.01.021). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X05002359> (visité le 28/04/2022).
- [Bou+18] Mathilde BOUVEL et al. « Semi-Baxter and Strong-Baxter : Two Relatives of the Baxter Sequence ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 32.4 (jan. 2018). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 2795-2819. ISSN : 0895-4801. DOI : [10.1137/17M1126734](https://doi.org/10.1137/17M1126734). URL : <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/17M1126734> (visité le 07/06/2021).
- [Bou11] Mireille BOUSQUET-MÉLOU. « Counting planar maps, coloured or uncoloured ». en. In : *Surveys in Combinatorics 2011*. Sous la dir. de Robin CHAPMAN. Cambridge : Cambridge University Press, 2011, p. 1-50. ISBN : 978-1-139-00411-4. DOI : [10.1017/CB09781139004114.002](https://doi.org/10.1017/CB09781139004114.002). URL : https://www.cambridge.org/core/product/identifier/CB09781139004114A006/type/book_part (visité le 21/04/2022).
- [Bre00] Enno BREHM. « 3-orientations and Schnyder 3-tree-decompositions ». In : *Master's thesis, FB Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin* (2000).
- [BRS14] Alin BOSTAN, Kilian RASCHEL et Bruno SALVY. « Non-D-finite excursions in the quarter plane ». en. In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 121 (jan. 2014), p. 45-63. ISSN : 0097-3165. DOI : [10.1016/j.jcta.2013.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jcta.2013.09.005). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316513001441> (visité le 07/06/2021).
- [BTT92] Giuseppe Di BATTISTA, Roberto TAMASSIA et Ioannis G. TOLLIS. « Area requirement and symmetry display of planar upward drawings ». en. In : *Discrete & Computational Geometry* 7.4 (avr. 1992), p. 381-401. ISSN : 1432-0444. DOI : [10.1007/BF02187850](https://doi.org/10.1007/BF02187850). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02187850> (visité le 07/06/2021).

- [DSS08] Reinhard DIESTEL, Alexander SCHRIJVER et Paul SEYMOUR. « Graph Theory ». In : *Oberwolfach Reports* 4.2 (mars 2008), p. 887-944. ISSN : 1660-8933. DOI : [10.4171/OWR/2007/16](https://doi.org/10.4171/OWR/2007/16). URL : https://www.ems-ph.org/journals/show_abstract.php?issn=1660-8933&vol=4&iss=2&rank=2 (visité le 20/04/2022).
- [DW15] Denis DENISOV et Vitali WACHTEL. « Random walks in cones ». In : *The Annals of Probability* 43.3 (mai 2015). Publisher : Institute of Mathematical Statistics, p. 992-1044. ISSN : 0091-1798, 2168-894X. DOI : [10.1214/13-AOP867](https://doi.org/10.1214/13-AOP867). URL : <https://projecteuclid.org/journals/annals-of-probability/volume-43/issue-3/Random-walks-in-cones/10.1214/13-AOP867.full> (visité le 07/06/2021).
- [EM14] David EPPSTEIN et Elena MUMFORD. « Steinitz theorems for simple orthogonal polyhedra ». en. In : *Journal of Computational Geometry* 5.1 (sept. 2014). Number : 1, p. 179–244–179-244. ISSN : 1920-180X. DOI : [10.20382/jocg.v5i1a10](https://doi.org/10.20382/jocg.v5i1a10). URL : <https://jocg.org/index.php/jocg/article/view/2932> (visité le 04/10/2021).
- [Fár48] István FÁRY. « On straight-line representation of planar graphs ». In : *Acta Sci. Math.* 11 (1948), p. 229-233.
- [Fel00] Stefan FELSNER. « Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes ». In : (2000).
- [Fel03] Stefan FELSNER. *Geodesic Embeddings and Planar Graphs* | Springer-Link. 2003. URL : <https://link.springer.com/article/10.1023/B:ORDE.0000009251.68514.8b> (visité le 20/02/2022).
- [FIT09] R. FUJIMAKI, Y. INOUE et T. TAKAHASHI. « An asymptotic estimate of the numbers of rectangular drawings or floorplans ». In : *2009 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. ISSN : 2158-1525. Mai 2009, p. 856-859. DOI : [10.1109/ISCAS.2009.5117891](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2009.5117891).
- [FM96] Hubert de FRAYSSEIX et Patrice Ossona de MENDEZ. « Planarity and Edge Poset Dimension ». en. In : *European Journal of Combinatorics* 17.8 (nov. 1996), p. 731-740. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1006/eujc.1996.0064](https://doi.org/10.1006/eujc.1996.0064). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669896900645> (visité le 21/04/2022).
- [FMR95] Hubert de FRAYSSEIX, Patrice Ossona de MENDEZ et Pierre ROSENSTIEHL. « Bipolar orientations revisited ». en. In : *Discrete Applied Mathematics. Fifth Franco-Japanese Days* 56.2 (jan. 1995), p. 157-179. ISSN : 0166-218X. DOI : [10.1016/0166-218X\(94\)00085-R](https://doi.org/10.1016/0166-218X(94)00085-R). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X9400085R> (visité le 07/06/2021).

- [FPS09] Éric FUSY, Dominique POULALHON et Gilles SCHAEFFER. « Bijective counting of plane bipolar orientations and Schnyder woods ». en. In : *European Journal of Combinatorics*. EuroComb'07 : Combinatorics, Graph Theory and Applications 30.7 (oct. 2009), p. 1646-1658. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/j.ejc.2009.03.001](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2009.03.001). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669809000481> (visité le 22/04/2022).
- [FSP08] Éric FUSY, Gilles SCHAEFFER et Dominique POULALHON. « Dissections, orientations, and trees with applications to optimal mesh encoding and random sampling ». In : *ACM Transactions on Algorithms* 4.2 (mai 2008), 19 :1-19 :48. ISSN : 1549-6325. DOI : [10.1145/1361192.1361196](https://doi.org/10.1145/1361192.1361196). URL : <https://doi.org/10.1145/1361192.1361196> (visité le 20/02/2022).
- [Fus07] Eric FUSY. « Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques ». These de doctorat. Palaiseau, Ecole polytechnique, jan. 2007. URL : <https://www.theses.fr/2007EPXX0034> (visité le 22/04/2022).
- [Fus09] Éric FUSY. « Transversal structures on triangulations : A combinatorial study and straight-line drawings ». en. In : *Discrete Mathematics*. 13th International Symposium on Graph Drawing, 2005 309.7 (avr. 2009), p. 1870-1894. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/j.disc.2007.12.093](https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.093). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X08000022> (visité le 07/06/2021).
- [Fus10] Éric FUSY. « New bijective links on planar maps via orientations ». en. In : *European Journal of Combinatorics* 31.1 (jan. 2010), p. 145-160. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/j.ejc.2009.02.008](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2009.02.008). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669809001073> (visité le 07/06/2021).
- [FZ08] Stefan FELSNER et Florian ZICKFELD. « Schnyder woods and orthogonal surfaces ». In : *Discrete & Computational Geometry* 40.1 (2008). Publisher : Springer, p. 103-126.
- [GLP12] Daniel GONÇALVES, Benjamin LÉVÊQUE et Alexandre PINLOU. « Triangle Contact Representations and Duality ». en. In : *Discrete & Computational Geometry* 48.1 (juill. 2012), p. 239-254. ISSN : 1432-0444. DOI : [10.1007/s00454-012-9400-1](https://doi.org/10.1007/s00454-012-9400-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s00454-012-9400-1> (visité le 20/02/2022).
- [Gon19] Daniel GONÇALVES. « 3-Colorable Planar Graphs Have an Intersection Segment Representation Using 3 Slopes ». en. In : *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Sous la dir. d'Ignasi SAU et Dimitrios M. THILIKOS. Lecture Notes in Computer Science. Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 351-363. ISBN : 978-3-030-30786-8. DOI : [10.1007/978-3-030-30786-8_27](https://doi.org/10.1007/978-3-030-30786-8_27).

- [Gou86] Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS. « Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young ». fr. In : *Combinatoire énumérative*. Sous la dir. de Gilbert LABELLE et Pierre LEROUX. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 1986, p. 112-125. ISBN : 978-3-540-47402-9. DOI : [10.1007/BFb0072513](https://doi.org/10.1007/BFb0072513).
- [He93] Xin HE. « On Finding the Rectangular Duals of Planar Triangular Graphs ». In : *SIAM Journal on Computing* 22.6 (déc. 1993). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 1218-1226. ISSN : 0097-5397. DOI : [10.1137/0222072](https://doi.org/10.1137/0222072). URL : <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0222072> (visité le 07/06/2021).
- [ITF09] Youhei INOUE, Toshihiko TAKAHASHI et Ryo FUJIMAKI. « Counting Rectangular Drawings or Floorplans in Polynomial Time ». In : *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* E92.A.4 (2009), p. 1115-1120. DOI : [10.1587/transfun.E92.A.1115](https://doi.org/10.1587/transfun.E92.A.1115).
- [JLA09] Jerzy JURKIEWICZ, Renate LOLL et Jan AMBJORN. *Using Causality to Solve the Puzzle of Quantum Spacetime*. en. 2009. URL : <https://www.scientificamerican.com/slideshow/the-self-organizing-quantum-universe/> (visité le 07/06/2021).
- [Ken+19] Richard KENYON et al. « Bipolar orientations on planar maps and SLE_{12} ». In : *The Annals of Probability* 47.3 (mai 2019). Publisher : Institute of Mathematical Statistics, p. 1240-1269. ISSN : 0091-1798, 2168-894X. DOI : [10.1214/18-AOP1282](https://doi.org/10.1214/18-AOP1282). URL : https://projecteuclid.org/journals/annals-of-probability/volume-47/issue-3/Bipolar-orientations-on-planar-maps-and-mathrmSLE_12/10.1214/18-AOP1282.full (visité le 07/06/2021).
- [KH97] Goos KANT et Xin HE. « Regular edge labeling of 4-connected plane graphs and its applications in graph drawing problems ». In : *Theoretical Computer Science* 172.1-2 (1997). Publisher : Elsevier, p. 175-193.
- [LEC67] A. LEMPEL, S. EVEN et I. CEDERBAUM. *An algorithm for planarity testing of graphs. Theory of Graphs : International Symposium : Rome, July, 1966, P. Rosenstiehl, Ed.* 1967.
- [Lol01] R. LOLL. « Discrete Lorentzian quantum gravity ». en. In : *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*. Proceedings of the XVIIIth International Symposium on Lattice Field Theory 94.1 (mars 2001), p. 96-107. ISSN : 0920-5632. DOI : [10.1016/S0920-5632\(01\)00957-4](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(01)00957-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563201009574> (visité le 07/06/2021).
- [LR15] R. LOLL et B. RUIJL. « Locally causal dynamical triangulations in two dimensions ». In : *Physical Review D* 92.8 (oct. 2015). Publisher : American Physical Society, p. 084002. DOI : [10.1103/PhysRevD.92.084002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.084002). URL :

- <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.084002> (visité le 20/02/2022).
- [MS06] Fotini MARKOPOULOU et Lee SMOLIN. « Gauge fixing in causal dynamical triangulations ». en. In : *Nuclear Physics B* 739.1 (avr. 2006), p. 120-130. ISSN : 0550-3213. DOI : [10.1016/j.nuclphysb.2006.01.009](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.01.009). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321306000320> (visité le 07/06/2021).
- [MS68] R.C. MULLIN et P.J. SCHELLENBERG. « The enumeration of c-nets via quadrangulations ». en. In : *Journal of Combinatorial Theory* 4.3 (avr. 1968), p. 259-276. ISSN : 00219800. DOI : [10.1016/S0021-9800\(68\)80007-9](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(68)80007-9). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021980068800079> (visité le 26/02/2022).
- [Rea12] Nathan READING. « Generic rectangulations ». en. In : *European Journal of Combinatorics* 33.4 (mai 2012), p. 610-623. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/j.ejc.2011.11.004](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2011.11.004). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669811002198> (visité le 20/02/2022).
- [Ros89] Pierre ROSENSTIEHL. « Embedding in the Plane With Orientation Constraints : The Angle Graph ». en. In : *Annals of the New York Academy of Sciences* 555.1 (1989). _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1749-6632.1989.tb22470.x>, p. 340-346. ISSN : 1749-6632. DOI : [10.1111/j.1749-6632.1989.tb22470.x](https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1989.tb22470.x). URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1749-6632.1989.tb22470.x> (visité le 25/04/2022).
- [Sch15] Gilles SCHAEFFER. « Planar maps ». In : *Handbook of enumerative combinatorics* 87.335 (2015). Publisher : CRC Press, p. 61.
- [Sch89] Walter SCHNYDER. « Planar graphs and poset dimension ». en. In : *Order* 5.4 (déc. 1989), p. 323-343. ISSN : 1572-9273. DOI : [10.1007/BF00353652](https://doi.org/10.1007/BF00353652). URL : <https://doi.org/10.1007/BF00353652> (visité le 14/03/2022).
- [Sch90] Walter SCHNYDER. « Embedding planar graphs on the grid ». In : *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. SODA '90. USA : Society for Industrial et Applied Mathematics, jan. 1990, p. 138-148. ISBN : 978-0-89871-251-3. (Visité le 07/06/2021).
- [SS85] Rodica SIMION et Frank W. SCHMIDT. « Restricted Permutations ». en. In : *European Journal of Combinatorics* 6.4 (déc. 1985), p. 383-406. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/S0195-6698\(85\)80052-4](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(85)80052-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669885800524> (visité le 23/04/2022).
- [Tak14] Toshihiko TAKAHASHI. « A Compact Code for Rectangular Drawings with Degree Four Vertices ». In : *Journal of Information Processing* 22.4 (2014), p. 634-637. DOI : [10.2197/ipsjjip.22.634](https://doi.org/10.2197/ipsjjip.22.634).

- [TFI09] Toshihiko TAKAHASHI, Ryo FUJIMAKI et Youhei INOUE. « A $(4n - 4)$ -Bit Representation of a Rectangular Drawing or Floorplan ». en. In : *Computing and Combinatorics*. Sous la dir. d'Hung Q. Ngo. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, p. 47-55. ISBN : 978-3-642-02882-3. DOI : [10.1007/978-3-642-02882-3_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02882-3_6).
- [TT86] Roberto TAMASSIA et Ioannis G. TOLLIS. « A unified approach to visibility representations of planar graphs ». en. In : *Discrete & Computational Geometry* 1.4 (déc. 1986), p. 321-341. ISSN : 1432-0444. DOI : [10.1007/BF02187705](https://doi.org/10.1007/BF02187705). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02187705> (visité le 25/04/2022).
- [Tut62a] W. T. TUTTE. « A Census of Hamiltonian Polygons ». en. In : *Canadian Journal of Mathematics* 14 (1962). Publisher : Cambridge University Press, p. 402-417. ISSN : 0008-414X, 1496-4279. DOI : [10.4153/CJM-1962-032-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1962-032-x). URL : <https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics/article/census-of-hamiltonian-polygons/58838C6D6404A0F03159DB86C4B4F451> (visité le 21/04/2022).
- [Tut62b] W. T. TUTTE. « A Census of Planar Triangulations ». en. In : *Canadian Journal of Mathematics* 14 (1962). Publisher : Cambridge University Press, p. 21-38. ISSN : 0008-414X, 1496-4279. DOI : [10.4153/CJM-1962-002-9](https://doi.org/10.4153/CJM-1962-002-9). URL : <https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics/article/census-of-planar-triangulations/0C07F660D1000D2AF1DA9065E84FA3E4> (visité le 21/04/2022).
- [Tut62c] W. T. TUTTE. « A Census of Slicings ». en. In : *Canadian Journal of Mathematics* 14 (1962). Publisher : Cambridge University Press, p. 708-722. ISSN : 0008-414X, 1496-4279. DOI : [10.4153/CJM-1962-061-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1962-061-1). URL : <https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics/article/census-of-slicings/0A99BE0B9BFD7FB5D68A89041D848A7D> (visité le 21/04/2022).
- [Tut63] W. T. TUTTE. « A Census of Planar Maps ». en. In : *Canadian Journal of Mathematics* 15 (1963). Publisher : Cambridge University Press, p. 249-271. ISSN : 0008-414X, 1496-4279. DOI : [10.4153/CJM-1963-029-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1963-029-x). URL : <https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics/article/census-of-planar-maps/D50259FBBE9A2BF677D85B1A5A85B16E> (visité le 20/02/2022).
- [Tut68] W. T. TUTTE. « On the enumeration of planar maps ». en. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 74.1 (jan. 1968), p. 64-75. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1968-11877-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-11877-4). URL : <http://www.ams.org/journal-getitem?pii=S0002-9904-1968-11877-4> (visité le 21/04/2022).

Index des notions

P -marche tandem	147	creux	48
S -marche tandem	152	degré d'une face	23
T -marche tandem	144	diagramme de visibilité	58
$\mathcal{WE}$ -type	35	diagramme de π	42
ω -nombre de marches	67, 135	dimension d'un ordre partiel	28
ω -poids	135	dépend séparément de p et de q ...	67
addition transverse	85	dérive nul	67
arbre de génération	44	entier actif	44
arête haute-droite	188	excursion	22
arête pleine	85, 100	face claire, sombre	36
arête transitive	31	face d'une carte	23
arête transversale	71, 85	face extérieure, externe	23
arête transverse	100	face interne, intérieure	23
bijection canonique	191	face à pointe blanche	91
bijection KMSW	61	face à pointe noire	91
bois de Schnyder triangulé	33	faces hautes	189
Bois de Schnyder étoilé	45	flat	47
bord latéral droit	27	graphe k -régulier	21
bord latéral gauche	27	holonome	68
carte duale	23	intersection de deux ordres totaux	28
carte enracinée	23	marche aléatoire P -admissible ...	168
carte planaire	22	marche aléatoire S -admissible ...	174
carte plane	23	marche dans le quart de plan	22
carte plane bipartie	31	marche tandem	61
carte plane eulérienne	36	marche tandem décorée	111
carte plane non séparable	29	marche tandem E -admissible	112
carte plane simple	22	marche tandem P -admissible	123
carte plane k -connexe	28	marche tandem paire	111
carte quasi 3-connexe	40	marche tandem pondérée	111
chemin de Dyck	141	marche tandem S -admissible	125
chemins de Dyck sans croisement	141	marche tandem T -admissible	119
cible d'une arête orientée	21	marche tandem V -admissible	113
coin	23	marche tandem W -admissible	116
coin attaché	96	marche ω -pondérée	135
coin extrémal	26	marqueur de coin extrémal	27
coin latéral	26	motif	42
complétion transverse	71	multigraphe	22
complété d'une permutation	44		

- ordre descendant 191
- ordre partiel sur les arêtes d'une
 - orientation bipolaire plane 28
- orientation bipolaire P-admissible .91
- orientation bipolaire plane 26
- orientation bipolaire S-transverse 100
- orientation bipolaire T-transverse .85
- orientation bipolaire T-transverse
 - triangulée 85
- orientation bipolaire V-transverse .71
- orientation bipolaire W-admissible 77
- orientation polyédrale 37
- origine d'une arête orientée 21
- paquet d'arêtes 22
- par paire/impair 128
- pas associé 128
- pas marqué 22, 119
- pas-face 61
- permutation plane 43
- permutations de Baxter 61
- point actif 44
- point actif-bas 188
- point actif-haut 187
- point d'une permutation 42
- point saillant 48
- polyèdre en coin 47
- polyèdre en coin rigide 48
- polyèdre orthogonal 47
- poset plan 31
- puits 26
- pôle 26
- pôle-type 61
- quadrangulation 24
- quadrangulation du k -gone 24
- quart de plan 61
- quasi-max 189
- relation de dominance 43
- sommet actif-bas 189
- sommet actif-haut 189
- sommet de subdivision 71
- sommet extrémal 26
- sommet extérieur 23
- sommet haut-droit 188
- sommet intérieur, interne 23
- sommet isolé d'une quadrangulation
 - du 6-gone 38
- sommet latéral 26, 27
- source 26
- sous-graphe couvrant 21
- squelette d'un polyèdre orthogonal 47
- strictement sur le bord latéral droit 27
- strictement sur le bord latéral gauche
 - 27
- structure transverse 35
- suite de coins bien étiquetée 40
- système de contact rectangulaires
 - libres 54
- système de contact triangulaires libre
 - 55
- système de contact triangulaires
 - rigides 55
- système de courbe rectangulaire rigide
 - 52
- triangulation 24
- triangulation du k -gone 24
- triangulation dynamique localement
 - causale 35
- triangulation irréductible 35
- type d'une face 61
- type extérieur 61
- équation maîtresse 135
- étiquetage de Schnyder 39
- évite le motif τ 42

Index des symboles

$A \sqcup B$	21	$\mathcal{S}_n$	39	ω_T	142
$A^\diamond$	173	$\mathcal{S}_{a,b}$	39	ω_V	139
$A^\square$	173	$\mathcal{S}'_{a,b}$	102	$\bar{\pi}$	44
E_a	136	$\tilde{\mathcal{S}}$	41	$\bar{x}$	22
F_a^ω	135	$\tilde{\mathcal{S}}_{a,b}$	41	p_n	37
P_n	168, 174	$\mathcal{S}_n$	41	$p_{a,b,c}$	37
R, G, B	36	$\mathcal{S}$	26	$\prec, \preceq$	43
R, G, B, R, G, B	38	$\mathcal{T}_n$	35	$\deg(v)$	21
$S(z)$	67, 174	$\mathcal{T}$	35	$\deg_{in}(v)$	21
$S^\diamond$	167, 174	$\mathcal{V}_n$	31	$\deg_{out}(v)$	21
$S^\square$	167, 174	W	22	ρ	67, 160
V_a	139	W_2	22	s_n	39
W_k	135	$\mathcal{W}$	33	s'_n	102
$[x^n]F(x)$	22	$\mathcal{W}_n$	33	$s_{a,b,c}$	39
$\#E$	21	$\mathcal{T}_n$	43	$s'_{a,b}$	102
Δ	129	$\mathbf{Z}$	21	$\tilde{s}_n$	41
E	22	$\text{bottom}(f)$	27	$\tilde{s}_{a,b}$	41
$\mathbf{N}$	21	$\delta(s)$	128	$\tilde{S}^\infty$	173
$\mathbf{Q}$	21	e_n	31	$\tilde{S}^{\diamond\square}$	173
$\mathbf{R}$	21	γ	67	$\tilde{S}^{\square\diamond}$	173
$\mathbf{R}_+$	21	$\hat{F}^\square$	168, 175	$\tilde{S}^{\square\square}$	173
$\mathcal{E}_n$	31	ι	170, 177	t_n	35
Λ_n	168, 175	$\lambda(n, i, j)$	168, 175	$t_n(v)$	143
N	22	$\llbracket a, b \rrbracket$	21	$\text{top}(f)$	27
NE	22	$\mathcal{B}_n$	170, 176	v_n	31
NW	22	M^*	23	w_n	34
NW_2	22	$\mathcal{P}$	182	$a_n^{(\omega)}$	67
NW^*	22, 119	$\mathcal{P}_n$	170, 177	$x(s), y(s)$	67
N_2	22	$\mathcal{P}_v$	189	z_0	67, 160
$\mathcal{N}$	26	$\mathcal{S}_t$	67, 160	Φ_P	91
Π_E	28	$\mathcal{S}^\diamond$	167	Φ_S	102
$\mathcal{P}_n$	37	$\mathcal{S}^\square$	167	Φ_T	86
$\mathcal{P}$	37	$\mathcal{T}_n$	144	Φ_V	73
$\mathcal{P}_{a,b,c}$	37	g	182	Φ_W	79
S	22	$\mathfrak{T}_b, \mathfrak{T}_t, \mathfrak{T}_l, \mathfrak{T}_r, \mathfrak{T}_q$	85	Ψ_E	112
SE	22	$\mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_t, \mathfrak{V}_l, \mathfrak{V}_r$	71	Ψ_P	124
SW	22	$\mu^\diamond$	167, 174	Ψ_S	125
$\mathbf{S}$	21	$\mu^\square$	167, 174	Ψ_T	120
$\mathcal{S}'_n$	102	ω	67, 160	Ψ_V	114
$\mathcal{S}$	39	ω_E	136	Ψ_W	116

(B')	27	(S1)	39	(TB)	85
(B)	27	(S2~)	41	(VB1)	71
(P1)	37	(S2)	39	(VB2)	71
(P2)	37	(SB1)	100	(W1)	33
(PB1)	91	(SB2)	100	(W2)	33
(PB2)	91	(T1)	35	(WB1)	77
(S1~)	40	(T2)	35	(WB2)	78

Titre : Énumération de cartes décorées et marches dans le quart de plan

Mots clés : combinatoire, carte planaire, orientation bipolaire, marche discrète, schnyder woods, poset plan

Résumé : Le travail présenté ici s'inscrit dans le domaine de la combinatoire bijective et énumérative, et plus particulièrement dans l'étude des *cartes planaires* : des graphes plongés dans la sphère. L'objet de cette thèse est de démontrer des résultats d'énumération exacts et asymptotiques sur des familles de *cartes décorées* (par une coloration contrainte des sommets ou des arêtes, par une orientation, etc.). Pour y parvenir, nous mettons en bijection les familles considérées avec des marches à grands et petits pas, contraintes à rester dans le quart de plan.

Notre méthode s'articule autour des orientations bipolaires planes : des cartes planaires décorées par une orientation des arêtes, sans cycle et avec une seule source et un seul puits. On ramène les familles de cartes que l'on considère à des orientations bipolaires planes, avec éventuellement une décoration des faces ou encore une contrainte sur leur taille. Ces orientations bipolaires nous servent alors de d'objets-pivots, et sont ensuite traduites sous la forme de marches dites *tandem* qui restent dans le quart de plan.

À partir de ces marches tandem il est possible d'obtenir les équations fonctionnelles qui régissent les séries génératrices induites. En découpant ces marches à grands pas en marches à petits pas, on peut aussi obtenir des algorithmes en temps polynomial pour calculer les premiers termes des suites combinatoires associées. Enfin, à l'aide d'outils sur les marches aléatoires contraintes à rester dans cône, on obtient des équivalents asymptotiques de ces suites.

Ce travail nous permet notamment de démontrer la conjecture (2009) de Y. Inoue, T. Takahashi et R. Fujimaki sur le comportement asymptotique des structures transverses. On obtient des résultats similaires pour les posets plans comptés par sommets ou comptés par arêtes. Pour deux des modèles de cartes considérés, et qui sont en lien avec les représentations des polyèdres en coin, le processus est plus délicat et on arrive seulement à donner un taux de croissance exponentiel.

En plus de ces résultats énumératifs, on fournit une bijection entre les posets plans comptés par sommets, et les *permutations planes*.

Title : Enumerating decorated maps with quadrant walks

Keywords : combinatorics, planar map, bipolar orientation, quadrant walk, schnyder woods, plane poset

Abstract : The work presented here is related to bijective and enumerative combinatorics, and more particularly to the study of planar graphs : graphs embedded in the sphere. The goal of this thesis is to give exact and asymptotic enumeration results on families of *decorated maps* (by a constrained coloring of its vertices or its edges, by an orientation, etc.). To achieve this, we biject the considered families with big and small steps walks, constrained to stay in the quarter plane.

Our method is designed around plane bipolar orientations: planar maps decorated by an orientation of its edges, with no cycle and with only one source and one sink. We reduce the families of maps we consider to plane bipolar orientations, with possibly a decoration of the faces or a constraint on their size. These bipolar orientations are then used as a pivot object, and are then translated in the form of so-called *tandem* walks which remain in the quarter plane.

From these tandem steps it is possible to obtain the functional equations which drive the induced generating series. By splitting these large step walks into small step walks, it is also possible to obtain algorithms in polynomial time to compute the first terms of the associated combinatorial sequences. Finally, using tools on random walks constrained to cones, we obtain asymptotic equivalents for these sequences.

This work allows us to prove the conjecture (2009) of Y. Inoue, T. Takahashi and R. Fujimaki on the asymptotic behavior of transversal structures. Similar results are obtained for vertex-counted and edge-counted plane bipolar posets. For two of the considered map models, which are related to corner polyhedra representations, the process is more delicate and we only manage to give an exponential growth rate.

In addition to these enumerative results, we provide a bijection between vertex-counted planar posets and plane permutations.