La fonction zêta de Riemann et la répartition des nombres premiers

par

Erkan Narmanli

Le but de cet exposé est d'étudier la *fonction de compte des nombres premiers*, que l'on note usuellement π, et qui a tout réel positif x associe le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le résultat que l'on souhaite présenter est le théorème des nombres premiers sous sa forme exposée par de la Vallée Poussin en 1899 dans [VP99] et qui fournit, en plus de l'équivalent de la fonction de compte des nombres premiers, une estimation du terme d'erreur.

A Préliminaires

A.1 Généralités sur la fonction zêta

Dans la suite, on notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et $p_1, ..., p_n, ...$ la suite croissante des nombres premiers. Si a est un réel, on notera Ω_a l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à a.

Dans le cadre de cette étude, on va supposer connus la plupart des résultats d'analyse complexe, ainsi que les résultats élémentaires concernant la fonction zêta de Riemann que l'on va rapidement introduire. La *fonction zêta de Riemann* est définie et holomorphe sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à 1 et est donnée par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\cdot$$

Cette fonction admet un prolongement holomorphe à l'ensemble des nombres complexes différents de 1 ; elle admet un unique pôle en 1, de résidu 1. Un des résultats le plus importants concernant la fonction zêta est celui du *produit eulérien* qui fait le lien entre cette application et les nombres premiers ; il s'exprime en disant que pour tout nombre complexe s de partie réelle strictement supérieure à 1 on a :

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}, \tag{1}$$

et la convergence du produit est normale sur tout compact de Ω_1. Une conséquence de l'écriture sous forme de produit eulérien est que la fonction zêta ne s'annule pas sur Ω_1 ; ceci résulte directement du fait qu'aucun terme du produit infini n'est nul et que la série de terme général $\frac{1}{p_n^s}$ est absolument convergent pour tout s dans Ω_1.

Un autre résultat fondamental concernant cette fonction est son *équation fonctionnelle* : pour tout nombre complexe s différent de 0 ou 1, on a les deux formules équivalentes

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad \text{où} \quad \xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s), \tag{2}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s), \tag{3}$$

Mémoire rédigé sous la direction de Samuel Baumard à l'Université Pierre et Marie Curie.
Le 29 juin 2014

et où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. On rappelle que la fonction Gamma, définie pour s dans Ω_0 par $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet pour pôles tous les entiers négatifs ou nuls ; il s'agit uniquement de pôles simples. On se servira du fait que pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$ tel que $\sigma > 0$ soit borné et $|t| \geqslant 1$ on a

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right) \leqslant O\left(\log|t|\right), \tag{4}$$

qui est une conséquence la formule de Stirling complexe (écriture sous somme d'Euler-Maclaurin) de Gamma. On utilisera également le résultat suivant : pour tout nombre complexe s différent de 1 et de partie réelle strictement supérieure à 0, on a $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$. Enfin, comme le montre Hadamard dans [Had93], la fonction zêta est une fonction entière et peut s'écrire sous forme de *produit de Hadamard-Weierstrass*. Après avoir reconnu le développement de la fonction Gamma, cela dit qu'il existe un nombre complexe a tel que pour tout nombre complexe s on ait

$$\zeta(s) = \frac{e^{as+b}}{2(s-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)^{-1} \cdot \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \tag{5}$$

A.2 Quelques résultats sur les séries de Dirichlet

On rappelle qu'une *série de Dirichlet* est une série de la forme $F : s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs complexes. Si F est une série de Dirichlet, alors on peut montrer qu'il existe un réel σ_c appelé *abscisse de convergence absolue* de F et tel que si $s = \sigma + it$ est un nombre complexe alors $F(s)$ converge pour $\sigma > \sigma_c$ et diverge pour $\sigma < \sigma_c$. Le résultat suivant nous sera utile dans la suite de l'exposé :

Théorème A.1 (Formule de Perron)**.** *Soient $F : s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet et σ_c son abscisse de convergence absolue, que l'on suppose finie. On suppose que :*

- *il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que pour tout réel σ tel que $\sigma_c < \sigma \leqslant \sigma_c + 1$ on ait la majoration $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leqslant (\sigma - \sigma_c)^{-\alpha}$;*
- *il existe une fonction B croissante telle que pour tout entier naturel n non nul on ait l'inégalité $|a_n| \leqslant B(n)$.*

Alors pour tout réels $x, T \geqslant 2$, pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$ tel que $\sigma \leqslant \sigma_c$ et en posant $\kappa = \sigma_c - \sigma + \frac{1}{\log(x)}$, on a

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s+w)\frac{x^w}{w}\,\mathrm{d}w + O\left(x^{\sigma_c-\sigma}\frac{\log^\alpha(x)}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma}\left(1 + \frac{x\log(T)}{T}\right)\right).$$

Proposition A.2. *Soient $F : s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs ou nuls et σ_c son abscisse de convergence absolue ; alors pour tout $s = \sigma + it$ dans Ω_{σ_n} on a :*

$$3\,F(\sigma) + 4\,\mathfrak{Re}(F(\sigma+it)) + \mathfrak{Re}(F(\sigma+2it)) \geqslant 0.$$

Démonstration. On pose g l'application qui à tout réel θ associe $2(1+\cos(\theta))^2$; cette application est clairement positive sur $\mathbb{R}$ et si θ est un réel, on a $g(\theta) = 2 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta)$, c'est à dire que $g(\theta) = 3 + 4\cos(\theta) + 2\cos(2\theta)$. D'autre part si s est un nombre complexe de partie imaginaire strictement supérieur à σ_c, alors on a le calcul :

$$\mathfrak{Re}(F(\sigma+it)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}\mathfrak{Re}\left(e^{it\log(n)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}\cos(t\log(n)).$$

On a aussi, de la même manière, le résultat $\mathfrak{Re}(F(\sigma+2it)) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^\sigma}\cos(2t\log(n))$, on peut ensuite utiliser cela pour calculer $3F(\sigma) + 4\mathfrak{Re}(F(\sigma+it)) + \mathfrak{Re}(F(\sigma+2it))$ qui est égal à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^\sigma}(3 + 4\cos(t\log(n)) + \cos(2t\log(n))$. On voit apparaître $g(t\log(t))$, où g est une application positive. Le résultat s'ensuit. ◆

A.3 La fonction logarithme intégral

Définition A.3. On définit la fonction *logarithme intégral*, notée Li, on posant pour tout nombre réel x supérieur ou égal a 2 :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log(u)}.$$

Elle est évidemment bien définie et continue sur son ensemble de définition.

Proposition A.4. *On a l'équivalent* $\mathrm{Li}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\log(x)}$.

Démonstration. On procède par intégration par parties en dérivant le terme $1/\log(u)$ et en intégrant le terme 1 dans l'expression de $\mathrm{Li}(x)$; on obtient :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log(u)} = \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log(u)^2}. \tag{6}$$

Comme l'application $u \mapsto 1/\log(u)^2$ est asymptotiquement négligeable par rapport à l'application $u \mapsto 1/\log(u)$, on en déduit qu'il en est de même pour leurs intégrales. Il en résulte donc bien l'équivalent proposé. ◆

B Quelques résultats importants

B.1 La fonction zêta ne s'annule pas sur le demi plan $\overline{\Omega_1}$

Définition B.1. On définit la fonction ϕ en posant pour tout s dans Ω_1 :

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^s}.$$

Cette fonction est clairement définie et holomorphe sur Ω_1.

Proposition B.2. *Pour tout nombre complexe s de $\overline{\Omega}_1$ différent de* 1 *on a* $\zeta(s) \neq 0$.

Démonstration. Premier point. On montre dans un premier temps que $s \mapsto \phi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, définie au départ sur Ω_1, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega_{1/2}$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes sur Ω_1, dont l'expression du terme général et de sa dérivée est

$$f_n(s) = \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} ; \qquad f_n'(s) = \frac{-\log(p_n)}{p_n^s\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^2}.$$

On a vu dans l'équation (1) que pour tout s dans Ω_1, on a $\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N f_n$, avec convergence normale du produit sur tout compact de Ω_1. Ainsi, on peut calculer la dérivée de zêta selon les règles de dérivation d'un produit infini :

$$\zeta'(s) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^N f_n(s)\right)' = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N f_k'(s) \prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^N f_n(s),$$

On calcule maintenant la dérivée logarithmique

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant N} f_k'(s) \cdot \prod_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n\neq k}} f_n(s)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant N} f_k(s)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^N \frac{f_k'(s)}{f_k(s)}$$

Avec les calculs précédents, on fait apparaître une série de Bertrand convergente

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{N\to\infty} -\sum_{k=1}^{N} \frac{\log(p_k)}{p_k^s\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log(p_k)}{p_k^s - 1}. \tag{7}$$

Ceci nous permet de définir l'application h qui à tout élément de Ω_1 associe

$$h(s) = \phi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^s} - \frac{\log(p_n)}{p_n^s - 1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^s(p_n^s-1)}.$$

Il ne reste alors plus qu'à justifier que l'application h ainsi définie est holomorphe sur $\Omega_{1/2}$. Pour cela, on montre qu'elle l'est sur tout $\Omega_{1/2+\varepsilon}$ pour tout réel ε strictement positif.

On a pour tout entier n strictement positif que $s \mapsto \frac{\log(p_n)}{p_n^s(p_n^s-1)}$ est holomorphe sur l'ensemble $\Omega_{1/2+\varepsilon}$. Il suffit maintenant de montrer que la série définissant h est normalement convergente sur cet ensemble.

On minore le dénominateur $|p_n^s(p_n^s-1)| \geqslant p_n^\sigma\,||p_n^s|-1|$ puis comme σ est strictement positif on a, à partir d'un certain rang, l'égalité $p_n^\sigma\,||p_n^s|-1| = p_n^{2\sigma} - p_n^\sigma = p_n^{2\sigma}(1-\frac{1}{p^\sigma})$, où $1-\frac{1}{p^\sigma} \geqslant 1/2$. Ainsi, pour n assez grand, on peut écrire la majoration :

$$\left\|\frac{\log(p_n)}{p_n^s(p_n^s-1)}\right\|_{\infty,\Omega_{1/2+\varepsilon}} \leqslant \frac{2\log(p_n)}{p_n^{1+2\varepsilon}}$$

où la série de terme général $\frac{2\log(p_n)}{p_n^{1+2\varepsilon}}$ est convergente, car majorée par la série de terme général $\frac{2\log(n)}{n^{1+2\varepsilon}}$. Ceci justifie la convergence normale de la série définissant h. On a donc bien h holomorphe sur $\Omega_{1/2}$. D'où la première assertion.

Conclusion. On sait qu'en corollaire du produit eulérien, zêta n'admet aucun zéro sur Ω_1. On suppose que ζ admet un zéro s_1 d'ordre m dans l'ensemble $(1+i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$. On cherche à monter qu'alors m est nul, en le majorant par un rationnel strictement inférieur à 1. On écrit s_1 sous la forme $s_1 = 1+ib$ avec b un réel différent de 0. On sait alors que $\overline{s}_1 = 1-ib$ est encore un zéro de ζ d'ordre m.

De la même façon on note n l'ordre d'annulation du complexe $s_2 = 1+2ib$ et de son conjugué $\overline{s}_2$. On sait qu'au voisinage de 1, pôle d'ordre 1 de zêta, le quotient ζ'/ζ s'exprime sous la forme

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + g(s),$$

où g est une application holomorphe au voisinage de 1. On en déduit alors l'expression de ϕ en s puis au voisinage de 1

$$\phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s) = \frac{1}{s-1} - g(s) + h(s)$$
$$\phi(1+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - g(1+\varepsilon) + h(1+\varepsilon).$$

Puis, en faisant tendre le réel strictement positif ε vers 0, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\phi(1+\varepsilon) = 1$. On peut ensuite appliquer le même raisonnement au voisinage des points s_1, $\overline{s}_1$, s_2, $\overline{s}_2$; on a alors obtenu les limites suivantes

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon\cdot\phi(1+\varepsilon) = 1, \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon\cdot\phi(1\pm ib+\varepsilon) = -m, \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon\cdot\phi(1\pm 2ib+\varepsilon) = -n.$$

Fixons à présent un réel t strictement supérieur à 1, on va calculer la quantité $A(t)$ définie par $A(t) = \phi(t-2ib) + 4\phi(t-ib) + 6\phi(t) + 4\phi(t+ib) + \phi(t+2ib)$; on a, par identification avec la formule du binôme de Newton, le calcul

$$A(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^t} \left(\frac{1}{p_n^{2ib}} + \frac{4}{p_n^{ib}} + 6 + 4p_n^{ib} + p_n^{2ib} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^t} \left(p_n^{\frac{ib}{2}} + p_n^{-\frac{ib}{2}} \right)^4 \geqslant 0.$$

On effectue alors le changement de variable $t = 1 + \varepsilon$ et on multiplie par ε strictement positif. Par passage à la limite, on a $-n-n-4m-4m+6 \geqslant 0$ et comme n et m sont des entiers positifs, on a l'inégalité : $8m \leqslant 6 - 2n \leqslant 6$. Ceci implique donc que $m \leqslant 6/8$, c'est à dire que m est nul.

On a donc montré que si on a un zéro d'ordre m, alors m vaut 0, c'est à dire que ζ ne s'annule pas. D'où la deuxième proposition. ◆

B.2 Étude générale des zéros de la fonction zêta

La question que nous allons nous poser dans ce paragraphe est la suivante : pour quelles valeurs de s le complexe $\zeta(s)$ s'annule-t-il ? Pour y répondre on va découper notre étude en trois ; on va d'abord étudier zêta sur le demi-plan fermé $\overline{\Omega}_1$ puis sur le demi-plan fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega_0$ et enfin parlera de la bande $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$.

Sur le demi-plan $\overline{\Omega}_1$. Il suffit ici d'invoquer la proposition B.2 qui nous affirme que la fonction zêta de Riemann ne s'annule pas sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle supérieure ou égale à 1.

Sur le demi-plan $\mathbf{C} \setminus \Omega_0$. Soit s un nombre complexe différent de 0 et de partie réelle négative ou nulle, on rappelle que l'équation fonctionnelle de zêta en s peut s'écrire

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

Réglons d'abord le cas de 0 ; les termes $2^s\pi^{s-1}$ et $\Gamma(1-s)$ ne s'annulent pas pour $s = 0$. De plus 1 est un pôle d'ordre 1 pour zêta alors que 0 est un zéro d'ordre 1 pour la fonction sinus ; aussi, lorsque s tend vers 0, le terme $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$ tend vers une limite finie non nulle. La fonction zêta ne s'annule donc pas en 0.

Toujours avec s un nombre complexe non nul de partie réelle inférieure ou égale à 0. En utilisant l'équation fonctionnelle, on cherche à savoir pour quelles valeurs de s on a $\zeta(s)$ nul. Comme nous l'avons vu plus tôt, le terme $\zeta(1-s)$ est non nul ; il en est de même pour $\Gamma(1-s)$ et $2^s\pi^{1-s}$. Aussi, il nous reste à étudier les points d'annulation du terme $\sin(\frac{\pi s}{2})$ pour en déduire les zéros de la fonction zêta. On va donc étudier la fonction sinus.

Soit z un nombre complexe, on revient à la définition du sinus : le complexe $\sin(z)$ est donc nul si et seulement si on a l'égalité $e^{iz} = e^{-iz}$. En écrivant z sous la forme $z = x + iy$, cela revient à avoir $e^{-y}e^{ix} = e^{y}e^{-ix}$. S'agissant d'une écriture sous la forme polaire, il en résulte que $y = 0$ et que $x \in \pi\mathbb{Z}$. La fonction sin ne s'annule donc qu'en les multiples entiers de π.

Ainsi, le terme $\sin(\frac{\pi s}{2})$ est nul si et seulement si s est un entier pair strictement négatif. Il en résulte que les seuls zéros de la fonction zêta sur le demi-plan $\mathbb{C} \setminus \Omega_0$ sont les entiers pairs strictement négatifs ; ces zéros sont appelés les *zéros triviaux* de la fonction zêta.

Sur la bande critique. La seule partie du plan complexe que nous n'avons pas encore étudiée est l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est strictement comprise entre 0 et 1. Dans le cadre de l'étude de la fontion zêta, cet ensemble est généralement appelé *bande critique*. Les zéros de zêta dans cet ensemble sont eux appelés, par opposition aux zéros triviaux, les *zéros non triviaux* de la fonction zêta.

La seule chose que nous pouvons affirmer pour le moment est que si s est un zéro non trivial de zêta alors, par l'équation fonctionnelle, $1-s$ l'est aussi. C'est à dire que l'ensemble des zéros non triviaux de zêta est symétrique par rapport au point 1/2.

De plus, on sait que pour tout élément s de Ω_0 on a $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$; ainsi l'axe des réels est un axe de symétrie des zéros de de la fonction zêta sur la bande critique. Avec l'autre symétrie exhibée plus tôt, on en déduit que l'axe $\frac{1}{2}i\mathbb{R}$ est lui aussi une droite de symétrie de l'ensemble des zéros non triviaux, cet axe est appelée *droite critique.*

Dans le reste de ce document on désignera par la lettre ρ un zéro non trivial de la fonction zêta ; lorsque l'on aura posé une telle racine ρ, on notera β la partie réelle de ρ et γ sa partie imaginaire. Toute les sommes et tous les produits indexés par ρ seront comptées avec multiplicités : un zéro non trivial de multiplicité m apparaîtra exactement m fois dans une telle somme ou un tel produit.

On conclut ce paragraphe avec les figures 1 et 2 qui illustrent notre connaissance de la position des zéros de la fonction zêta et des symétries que vérifient les zéros non triviaux.

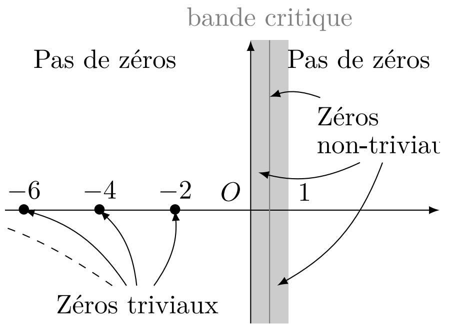

FIGURE 1 – Répartition des zéros de la fonction zêta de Riemann dans le plan complexe.

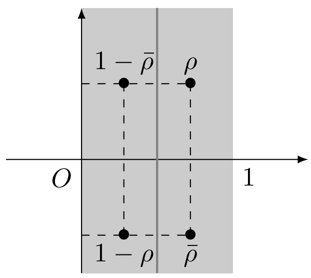

FIGURE 2 – Symétrie sur les zéros non triviaux, dans la bande critique.

B.3 La fonction thêta de Tchebychev

Définition B.3. On définit, sur l'ensemble des nombres réels x supérieurs ou égaux à 1, la fonction ϑ appelée *fonction thêta de Tchebychev* ; elle est donnée par

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant x}} \log(p).$$

On remarque que $\vartheta(x)$ est nulle pour tout réel x strictement inférieur à 2.

Proposition B.4. *Pour tout réel x supérieur ou égal à 1 on a : $\vartheta(x) \leqslant 2x\log(2)$.*

Démonstration. Majoration sur les entiers. On montre par récurrence forte sur n un entier non nul la propriété $\mathcal{H}_n$: « $\vartheta(n) \leqslant 2n\log(2)$ ».

Si $n = 1$; on a bien $\vartheta(1) = 0 \leqslant 2\log(2)$.

Si $n = 2$; on a bien $\vartheta(2) = \log(2) \leqslant 4\log(2)$.

Si $n \geqslant 3$; on suppose que $\mathcal{H}_m$ est vérifiée pour tout entier m strictement inférieur à n. On veut montrer $\mathcal{H}_n$.

- Si n est pair ; alors comme n est supérieur ou égal à 3, il ne peut pas être premier. On a donc $\theta(n) = \theta(n-1)$. Ensuite, par hypothèse de récurrence, on obtient la série d'inégalités : $\theta(n) \leqslant 2(n-1)\log(2) \leqslant 2n\log(2)$; ce qui prouve la propriété $\mathcal{H}_n$.
- Si n est impair ; on pose $n = 2m+1$. On calcule grâce à la formule du binôme de Newton :

$$4^m = \frac{2^{2m+1}}{2} = \frac{(1+1)^{2m+1}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}$$

En gardant les termes correspondants à $k = m$ et $k = m + 1$ dans la somme, on a l'inégalité $4^m \geqslant \frac{1}{2}(\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1})$, où on remarque que $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{2m+1-m}$, et on a finalement $4^m \geqslant \binom{2m+1}{m+1}$. On se rend compte que si p est un nombre premier compris, au sens large, entre $m + 2$ et $2m + 1$ alors p divise $\binom{2m+1}{m+1}$. On a donc

$$\prod_{\substack{p\in\mathscr{P} \\ m+2\leqslant p\leqslant 2m+1}} p \mid \binom{2m+1}{m+1} \leqslant 4^m.$$

On passe ensuite au logarithme dans l'inégalité et on fait apparaître ϑ :

$$\vartheta(2m + 1) - \vartheta(m + 1) \leqslant 2m \log(2).$$

Or par hypothèse de récurrence, on a l'inégalité $\vartheta(m + 1) \leqslant 2(m + 1) \log(2)$. Il s'ensuit donc que $\theta(n) = \theta(2m + 1) \leqslant 2(2m + 1) \log(2)$. Ce qui prouve la propriété $\mathcal{H}_n$.

Conclusion. On a montré que pour tout entier non nul n, on a $\vartheta(n) \leqslant 2n \log(2)$. Soit maintenant x un réel supérieur ou égal à 1, au vu de la définition de ϑ, on a $\vartheta(x) = \vartheta(\lfloor x\rfloor)$. Puis on a

$$\vartheta(\lfloor x\rfloor) \leqslant 2\lfloor x\rfloor \log(2) \leqslant 2x \log(2).$$

On obtient donc bien $\vartheta(x) \leqslant 2x \log(2)$. Ce qui achève la démonstration. ◆

B.4 Les fonctions de von Mangoldt

Définition B.5. On définit la *fonction de von Mangoldt*, notée Λ, en posant pour tout entier naturel n :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \text{ pour } p \in \mathscr{P} \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition B.6. On définit la *fonction sommatoire de von Mangoldt*, aussi appelée *fonction psi de Tchebychev*, que l'on note ψ et qui à tout nombre réel x positif associe

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n).$$

Remarque. Si x est un réel supérieur ou égal à 1, alors on peut réécrire $\psi(x)$ en fonction de la fonction ϑ de Tchebychev. En effet on peut écrire $\psi(x)$ comme étant la somme $\sum_{p^k\leqslant x} \log(p)$ où p est un nombre premier et k un entier naturel non nul. L'assertion $p^k \leqslant x$ s'écrit aussi $p \leqslant x^{1/k}$ et on peut sommer pour k décrivant $\mathbb{N}$: on a $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{p\leqslant x^{1/k}} \log(p)$. On se rend alors compte de l'égalité :

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \vartheta\left(x^{1/k}\right). \tag{8}$$

On remarque que la somme, a priori infinie, du terme de droite est en fait une somme finie. En effet, dès que k est strictement supérieur à $\log_2(x)$ on a $x^{1/k}$ strictement inférieur à 2 et $\vartheta(x^{1/k})$ est alors nul.

Proposition B.7. *Soit s un élément de Ω_1 ; alors on a :* $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

Démonstration. Soit s un élément de Ω_1, on cherche à calculer $\zeta'(s)/\zeta(s)$, la dérivée logarithmique de $\zeta(s)$. On va donc calculer la dérivée logarithmique de zêta sous forme de produit eulérien. Comme on l'a déjà vu dans la démonstration de la proposition B.2 (équation (7)), on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n^s} \frac{\log(p_n)}{1 - p_n^{-s}},$$

où la norme de p_n^{-s} est strictement inférieure à 1 pour tout entier naturel n ; aussi on peut développer $\frac{1}{1-p_n^{-s}}$ en série entière, on obtient alors

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\log(p_n)}{p_n^{ks}} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où l'on a reconnu la fonction de von Mangoldt ; ce qui achève la démonstration. ◆

C Le théorème des nombres premiers

C.1 Un lemme pratique

Le lemme que nous allons démontrer dans ce paragraphe est un outil qui nous permettra de répercuter un terme d'erreur dans l'expression de $\psi(x)$ en un terme d'erreur dans l'expression de $\pi(x)$. On commence déjà par un résultat intermédiaire :

Proposition C.1. *On a, quand $x \geqslant 2$ tend vers l'infini : $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$.*

Démonstration. Soit x un réel supérieur ou égal à 2 on peut utiliser la relation (8) vue plus tôt pour écrire $\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \sum_{k\geqslant 3}\vartheta(x^{1/k})$. Comme x est supérieur ou égal à 2, on peut utiliser la proposition B.4 qui nous fournit la majoration :

$$\psi(x) - \vartheta(x) = 2\log(2)\sqrt{x} + 2\log(2)\sum_{k=3}^{+\infty} x^{1/3}.$$

Or, comme on l'a vu plus tôt, il y a en fait au plus $\log_2(x)$ termes dans la somme, et la différence $\psi(x)-\vartheta(x)$ est donc majorée par $2\log(2)(\sqrt{x}+\log_2(x)x^{1/2})$ qui est dominée par $\sqrt{x}\log(x)$; d'où le résultat. ◆

Lemme C.2. *Soit $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, croissante et strictement positive telle que l'on ait asymptotiquement : $\psi(x) = x + O(R(x))$; alors quand x tend vers l'infini on a :*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\frac{R(x)}{\log(x)} + R(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\right).$$

Démonstration. On commence par appliquer la formule sommatoire d'Abel avec $\varphi(x) = 1/\log(x)$ et avec $A(x) = \pi(x) = \sum_{2\leqslant n\leqslant x} a_n\varphi(n)$ où a_n vaut $\log(p)$ si $n = p$ est un nombre premier et zéro sinon. On obtient :

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u\log^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

On utilise la proposition C.1 qui nous fournit la domination $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$, ainsi que l'hypothèse de l'énoncé où l'on a supposé $\psi(x) = x + O(R(x))$; on a alors le calcul :

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + O\left(\frac{R(x)}{\log(x)} + \sqrt{x}\right) + \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log^2(u)} + \int_2^x \left(O\left(\frac{R(u)}{u\log^2(u)}\right) + O\left(\frac{1}{u^{1/2}\log(u)}\right)\right)\mathrm{d}u.$$

On fait apparaître le logarithme intégral grâce à l'équation (6) de la démonstration de la proposition A.4 que l'on peut réécrire $\frac{x}{\log(x)} = \mathrm{Li}(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log^2(u)} + O(\frac{2}{\log(2)})$. Le terme $\int_2^x \mathrm{d}u/\log^2(u)$ disparaît donc et on a alors l'équation

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\frac{R(x)}{\log(x)} + \sqrt{x}\right) + \int_2^x O\left(\frac{R(u)}{u\log^2(u)}\right)\mathrm{d}u + \int_2^x O\left(\frac{1}{u^{1/2}\log(u)}\right)\mathrm{d}u. \quad (9)$$

On va maintenant étudier indépendamment chacune des deux intégrales et montrer qu'elles sont bien dominées respectivement par $\frac{R(x)}{\log(x)} + R(\sqrt{x})$ et $\sqrt{x}$.

Première intégrale. On la découpe au point $\sqrt{x}$ et utilise la croissance de R pour effectuer des majorations des deux intégrales obtenues ; on calcule explicitement la seconde, on obtient :

$$\int_2^x \frac{R(u)}{u\log^2(u)}\,\mathrm{d}u \leqslant R(\sqrt{x})\int_2^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{u\log^2(u)} + R(x)\left(\frac{1}{\log(x)} - \frac{2}{\log(x)}\right).$$

L'intégrande restante étant positive, on peut majorer l'intégrale par $\int_2^{+\infty} u^{-1}\log^{-2}(u)\,\mathrm{d}u$ qui est une intégrale de Bertrand convergente. Ainsi, le premier terme est dominé par $R(\sqrt{x})$ et le second terme est clairement dominé par $\frac{R(x)}{\log(x)}$. On a donc montré que :

$$\int_2^x \frac{R(u)}{u\log^2(u)}\,\mathrm{d}u = O\left(R(\sqrt{x}) + \frac{R(x)}{\log(x)}\right). \tag{10}$$

Seconde intégrale. On veut montrer que $\int_2^x u^{-1/2}\log^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ est dominée par $\sqrt{x}$, comme il s'agit de deux applications positives, il suffit de montrer que pour x assez grand, on a l'inégalité $\int_2^x u^{-1/2}\log^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{x}$. On considère donc la fonction f qui a tout réel x supérieur ou égal à 2 associe $\int_2^x u^{-1/2}\log^{-1}(u)\,\mathrm{d}u - \sqrt{x}$. Or la dérivée $f'(x) = \frac{2-\log(x)}{2\sqrt{x}\log(x)}$ de f est négative pour $x \geqslant e^2$, et où on a $f(e^2) \simeq -0.719...$ est strictement négatif. On en déduit donc que pour tout réel x supérieur ou égal à e^2 on a $f(x) < 0$ et on a donc bien

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\log(u)}\,\mathrm{d}u = O\left(\sqrt{x}\right). \tag{11}$$

Conclusion. Il suffit maintenant d'utiliser les deux dominations, obtenues dans les équations (10) et (11), dans (9) pour obtenir le résultat annoncé. ◆

C.2 Une région sans zéros

On dispose du théorème suivant qui nous fournit une région explicite sans zéros dans la bande critique :

Théorème C.3. *Il existe une constante c strictement positive telle que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $s = \sigma + it$ vérifiant :*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log|t|}.$$

Démonstration. Soit $s = \sigma + it$ un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à 1, on sait d'après la proposition B.7 que l'on a $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)/n^s$; où $s \mapsto \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)/n^s$ est une série de Dirichlet à coefficients positifs ou nuls et d'abscisse de convergence égale à 1. Ainsi, d'après la proposition A.2, on peut écrire pour tout réel σ strictement positif et pour tout réel t :

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geqslant 0. \tag{12}$$

On va maintenant majorer les trois termes de l'inégalité ci-dessus. Pour le premier terme, il suffit d'utiliser fait que 1 est un pôle d'ordre 1 et de résidu 1 pour zêta, on a la majoration

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leqslant \frac{3}{\sigma-1} + O(1). \tag{13}$$

Pour les deux autres termes, on utilise utilise la dérivée logarithmique du produit de Hadamard-Weierstrass de zêta sous sa forme vue dans l'équation (5) :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -a + \frac{1}{s-1} + \frac{\Gamma'}{2\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) - \sum_\rho\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right). \tag{14}$$

Les deux premiers termes à droite de cette équation sont clairement majorés en norme dans un voisinage de l'infini, et on peut montrer que la partie réelle du dernier terme est négative pour $\sigma > 1$. En effet, comme on a $\sigma > 1$ et bien-sûr $0 < \mathfrak{Re}(\rho) < 1$, alors les parties réelles des quotients $1/\rho$ et $1/(s-\rho)$ sont strictement positives. Ainsi la partie réelle de l'opposé de la somme sur ρ est strictement négative.

Pour la dérivée logarithmique de la fonction Gamma, on invoque le résultat de l'équation (4) qui nous dit que pour $\sigma > 1$ et $|t| \geqslant 2$, la partie réelle de $(\Gamma'/2\Gamma)(s/2+1)$ est inférieure à $O(\log|t|)$. En reportant ces majorations dans l'équation (14), on a pour tout $\sigma > 0$ majoré et $|t| \geqslant 2$:

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leqslant O(1) + O(\log|t|) - \sum_{\rho} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right), \tag{15}$$

où l'on garde temporairement la somme sur les zéros non triviaux. On fixe maintenant $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial de zêta tel que $|\gamma| \geqslant 2$, le but va être d'utiliser ce que nous venons de dire pour montrer qu'on a nécessairement $\beta \leqslant 1 - \frac{c}{\log|\gamma|}$ pour une certaine constante c. On prend alors $s = \sigma + i\gamma$ un nombre complexe de partie réelle σ strictement supérieure à 1 et de même partie imaginaire γ que ρ. On applique alors l'équation (15) à $\sigma + i\gamma$ (on a bien $\sigma > 1$ et$|\gamma| \geqslant 2$) où l'on garde, dans la somme sur les zéros non triviaux, le terme $1/(s-\rho) = 1/(\sigma-\beta)$; on obtient :

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+i\gamma)}{\zeta(\sigma+i\gamma)}\right) \leqslant O(\log|\gamma|) - \frac{1}{\sigma-\beta} \leqslant \frac{c'}{2}\log|\gamma| - \frac{1}{\sigma-\beta}, \tag{16}$$

pour une certaine constante c' strictement positive et indépendante de s et ρ. On utilise à nouveau l'équation (15), mais on l'applique cette fois à $\sigma+2i\gamma$ et on ne garde aucun terme de la somme sur les zéros non triviaux (on peut se le permettre car la partie réelle de cette somme est strictement négative). On peut supposer que pour la même constante c' on a :

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2i\gamma)}{\zeta(\sigma+2i\gamma)}\right) \leqslant \frac{c'}{2}\log|\gamma|. \tag{17}$$

On reporte les majorations des équations (13), (16) et (17) dans (12) (on peut car σ est strictement supérieur à 1) et on obtient :

$$-\frac{3}{\sigma-1} + \frac{4}{\sigma-\beta} - c'\log|\gamma| \leqslant 0.$$

On isole alors $1-\beta$ dans l'inégalité ci-dessus ; on a donc, pour tout $\sigma > 1$ et pour tout $\rho = \beta + i\gamma$ tel que $|\gamma| \geqslant 2$, le calcul :

$$1-\beta \geqslant \frac{4}{c'\log|\gamma| + \frac{3}{\sigma-1}} - (\sigma-1) = \frac{4-3-(\sigma-1)c'\log|\gamma|}{c'\log|\gamma| + \frac{3}{\sigma-1}}.$$

Ceci étant valable quelque soit le réel $\sigma > 1$ choisit, on peut l'évaluer pour $\sigma = 1 + 1(2c'\log|\gamma|)$; on alors

$$1-\beta \geqslant \frac{1-\frac{c'\log|\gamma|}{2c'\log|\gamma|}}{c'\log|\gamma| + 6c'\log|\gamma|} = \frac{1/2}{7c'\log|\gamma|} = \frac{c}{\log|\gamma|},$$

où l'on a posé $c = c'/14$ strictement positif. Ce qui achève la démonstration ◆

On a représenté une telle région sans zéros dans la figure 3. Une conséquence pratique du résultat que nous venons de démontrer est la proposition suivante :

Proposition C.4. *Il existe une constante c_1 strictement positive telle que pour tout nombre complexe $s = \sigma + it$ vérifiant $|t| \geqslant 3$ et $\sigma \geqslant 1 - \frac{c_1}{\log(|t|)}$, on ait :*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log|t|).$$

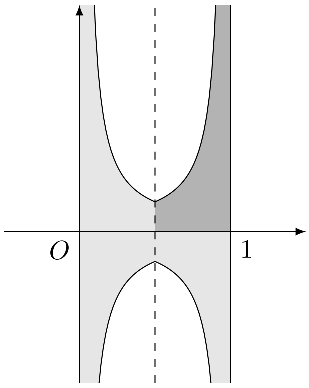

FIGURE 3 – Région sans zéros fournie par le théorème C.3. En gris foncé la région fournie par le théorème ; en gris clair celle déduite par symétrie.

Démonstration. Si $\rho = \beta + i\gamma$ est un zéro non trivial de la fonction zêta, on sait par le théorème C.3 qu'il existe une constante c strictement positive, que l'on peut supposer strictement inférieure à $\frac{1}{16}$ et telle que l'on ait $\beta < 1 - \frac{8c}{\log|\gamma|}$. Soit maintenant $s = \sigma + it$ un nombre complexe tel que $t \geqslant 4$ et $\sigma \geqslant 1 - \frac{4c}{\log|t|}$, on pose

$$\mu = \inf_{\rho} \left\{ \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right)\right\}.$$

On a $\mu \geqslant 0$. Pour montrer que μ est positif ou nul, on effectue une distinction de cas. On fixe $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial de zêta.

Si $|s-\rho| > \frac{1}{2}|\rho|$; alors on peut calculer

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{\beta}{|\rho|^2} + \frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} = \frac{\beta\,|s-\rho|^2 + |\rho|^2(\sigma-\beta)}{|\rho|^2\,|s-\rho|^2} = \frac{\frac{\theta^2\beta}{4} + \sigma - \beta}{|s-\rho|^2}, \tag{18}$$

où l'on à posé $\theta = 2\frac{|s-\rho|}{|rho|}$. Or, par hypothèse, on sait que θ est un réel strictement supérieur à 1, en utilisant cette inégalité et en utilisant le fait que β est strictement inférieur à 1 (car ρ est dans la bande critique), on obtient

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right) > \frac{\frac{\beta}{4} + \sigma - \beta}{\left||s-\rho|^2\right|} = \frac{\sigma - \frac{3}{4}\beta}{|s-\rho|^2} > \frac{\sigma - \frac{3}{4}}{|s-\rho|^2}.$$

Or, comme t est supérieur ou égal à 4 et c est strictement inférieur à $\frac{1}{16}$, on sait que σ est supérieur ou égal à $1 - \frac{1}{4\log(4)} \simeq 0.81$. Aussi $\sigma - 0.75$ est strictement positif et la partie réelle que l'on considère est aussi strictement positif.

Si maintenant on suppose $|s-\rho| \leqslant \frac{1}{2}|\rho|$; cette hypothèse peut aussi se reformuler sous la forme $4((\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2) \leqslant \gamma^2 + \beta^2$. En utilisant le fait que β^2 est inférieur à 1, on a les inégalités $2|t-\gamma| \leqslant \sqrt{\gamma^2+1} \leqslant |\gamma|+1$. On a donc $|\gamma|+1 \geqslant 2|t-\gamma| \geqslant 2\,||t|-|\gamma||$. On va montrer grâce à une dichotomie que cela implique que $\gamma \leqslant 2t+1$.

- Si $|\gamma| \geqslant t$, alors on a $|\gamma| + 1 \geqslant 2|\gamma| - 2t$ c'est à dire $|\gamma| \leqslant 2t+1$. On a donc bien la majoration annoncée.
- Si $|\gamma| \leqslant t$, alors on a trivialement l'inégalité annoncée.

Sachant maintenant que $\gamma \leqslant 2t+1$, l'inégalité $\beta < 1 - \frac{8c}{\log|\gamma|}$ devient

$$\beta < 1 - \frac{8c}{\log(2t+1)} \leqslant 1 - \frac{4c}{\log(t)} \leqslant \sigma,$$

où la deuxième inégalité provient du fait que $\frac{8c}{\log(2t+1)}$ est supérieur à $\frac{4c}{\log(t)}$ pour t supérieur à $1+\sqrt{2}$, qui est bien inférieur à 4. On peut alors reporter l'inégalité $\beta < \sigma$ dans l'équation (18) ; cela nous fournit encore que la partie réelle de $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}$ est strictement positive. Par passage à la borne inférieur, on obtient bien $\mu \geqslant 0$.
Ensuite. Soit toujours $s = \sigma + it$ un nombre complexe tel que $t \geqslant 4$ et $\sigma \geqslant 1 - \frac{4c}{\log|t|}$. Par passage à la partie réelle dans l'équation (14), et en utilisant encore le fait que la partie réelle de tous les termes dans la somme portant sur ρ est positive (mais cette fois pour un complexe s de partie réelle strictement inférieure à 1) on obtient l'existence d'un réel K strictement positif tel que

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leqslant K \log(t). \tag{19}$$

On prend maintenant $s = \sigma + it$ un nombre complexe tel que $t \geqslant 5$ et $\sigma \geqslant 1 - \eta$, où on a noté $\eta = \frac{c}{\log(t)}$. Soit aussi $s_0 = 1 + \eta + it$ et w un nombre complexe dans le disque fermé $\overline{D}(0, 4\eta)$. On écrit maintenant $s_0 + w = \sigma' + it'$.Or, comme η est inférieur à $\frac{1}{16\log(5)} \simeq 0.039$, on a $4\eta \leqslant 1$ et donc $t' = t + \mathfrak{Im}(w) \geqslant 4$. De la même façon, on a $\sigma' = 1 + \eta + Re(w)$ supérieur ou égal à $1 + 5\eta$ et donc supérieur ou égal à $1 - \frac{4c}{\log(t')}$. Ainsi $s_0 + w$ satisfait aux conditions de l'équation (19) et on peut écrire

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{\zeta'(s_0+w)}{\zeta(s_0+w)}\right) \leqslant K\log(t') \leqslant K\log(t+4\eta) \leqslant K\log(2t) \leqslant 2K\log(t), \tag{20}$$

où la dernière inégalité est vraie car t est supérieur à 2, la plus grande des deux racines du polynôme $X^2 - 2X = X(X-2)$.
Conclusion. On cherche maintenant à appliquer le lemme de Borel-Carathéodory à l'application F définie sur le disque de centre 0 et de rayon 4η et donnée par

$$F(w) = \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} - \frac{\zeta'(s_0+w)}{\zeta(s_0+w)}.$$

On a vu dans l'équation (20) que pour tout w dans le disque $\overline{D}(0, 4\eta)$, la partie réelle de $F(w)$ est majorée par $A = 2K\log(t) + \left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right|$. Le théorème de Borel-Carathéodory nous alors que pour tout w de norme strictement inférieure à 4η, on a à la majoration sur F :

$$\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} - \frac{\zeta'(s_0+w)}{\zeta(s_0+w)}\right| \leqslant \frac{4K\log(t)\,|w|}{4\eta - |w|}.$$

Or, on a $s - s_0 = 1 + \eta - \sigma \leqslant 2\eta$ on peut donc appliquer la majoration précédente à $w = s - s_0$ et majorant $|s - s_0|$ par 2η ; et utiliser le caractère 1-lipschitzien de la norme pour minorer le module de $F(w)$. On a $\left|\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| - \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\right| \leqslant 4K\log(t)$; ce qui implique

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqslant 4K\log(t) + \left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right|. \tag{21}$$

En réécrivant la dérivée logarithmique de zêta en s_0 sous sa forme vu dans la proposition B.7, on a la majoration $\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\eta}} = \frac{\zeta'(1+\eta)}{\zeta(1+\eta)}$. Or, connaissant le pôle de zêta en 1, on sait que $\frac{\zeta'(1+\eta)}{\zeta(1+\eta)}$ est de la forme par $\eta^{-1} + O(1) = \frac{\log(t)}{c} + O(1)$. En remplaçant cette estimation dans l'équation(21) on obtient $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = O(\log(t))$, ce qui est bien ce que l'on cherchait à montrer. ◆

C.3 Le théorème de de la Vallée Poussin

Le résultat que nous allons démontrer dans ce paragraphe est le calcul du terme d'erreur donné par de la Vallée Poussin en 1899 dans [VP99] ; c'est la conséquence principale de la région sans zéros exhibée dans le théorème C.3. Le théorème s'énonce de la manière suivante :

Théorème C.5. *Il existe une constante c_0 strictement positive telle lorsque x tend vers l'infini on ait :*

$$\psi(x) = x + O\left(x\, e^{-c_0\sqrt{\log(x)}}\right),$$
$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x\, e^{-c_0\sqrt{\log(x)}}\right).$$

Démonstration. Première estimation. On cherche à appliquer la seconde formule de Perron effective (théorème A.1) à la série de Dirichlet donnée par $F(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, d'abscisse de convergence absolue égale à 1. On vérifie donc les conditions du théorème :

- Comme 1 un un pôle d'ordre et de résidu 1 pour zêta et d'après la proposition B.7, on sait que $F(\sigma)$ est asymptotiquement dominée par $(\sigma-1)^{-1}$, on prend donc $\alpha = 1$ (avec les notations du théorème A.1) ;
- Avec $B : x \mapsto \log(x)$ croissante, on a pour tout entier naturel n non nul la majoration $\Lambda(n) \leqslant B(n)$.

On applique la seconde formule de Perron effective en $\sigma = 0$; pour tout réels $x, T \geqslant 2$ et pour $\kappa = 1 + \frac{1}{\log(x)}$, on a :

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^0} = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O\left(\log(x)\left(1 + \frac{x\log(T)}{T}\right)\right). \tag{22}$$

On utilise maintenant le théorème C.3 qui nous affirme qu'il existe une constante c_1 telle que ζ n'ait pas de zéros dans la région $\sigma \leqslant 1 - \frac{c_1}{\log(T)}$. On complète alors l'intégrale entre $\kappa - iT$ et $\kappa + iT$ en une intégrale sur un contour $\mathcal{R}$ contenu dans cette région, où $\mathcal{R}$ est le rectangle de sommets $\kappa - iT$, $\kappa + iT$, $1 - \frac{c_1}{\log(T)} + iT$, $1 - \frac{c_1}{\log(T)} - iT$ (voir figure 4). Comme κ est supérieur à 1, on a bien construit ce contour de telle sorte que le seul pôle de l'intégrande à l'intérieur de $\mathcal{R}$ soit en $s = 1$.

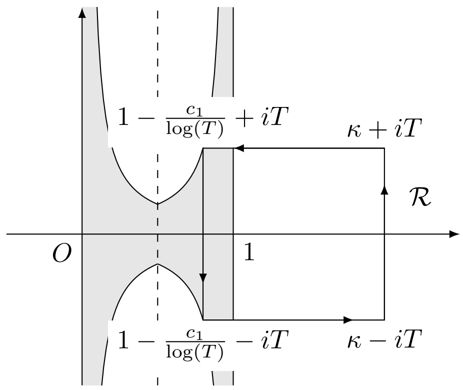

Figure 4 – Définition du contour $\mathcal{R}$. La région en gris représente la région sans zéros du théorème C.3.

Soit $G : s \mapsto \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$; on calcule le résidu de G en 1. Il existe un voisinage de 1 et une fonction h holomorphe dans ce voisinage tels que l'on y ait $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s)$ et donc $\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + h'(s)$. On peut donc écrire le quotient sous la forme $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-1}{s-1} + g(s)$ avec g holomorphe dans un voisinage de 1. Le résidu de G en 1 est donc égal à $-x$. Le théorème des résidus nous affirme donc que l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}} G(s)\,\mathrm{d}s$ est égale à $-x$, en décomposant selon les arêtes du rectangle on a :

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s = x + \frac{1}{2i\pi}I_1 + \frac{1}{2i\pi}I_2 + \frac{1}{2i\pi}I_1',$$

où on a posé $I_1 = \int_{\kappa+iT}^{1-c_1/\log(T)+iT} G(s)\,\mathrm{d}s$, ainsi que $I_1' = \int_{1-c_1/\log(T)-iT}^{\kappa-iT} G(s)\,\mathrm{d}s$ et aussi avec $I_2 = \int_{1-c_1/\log(T)+iT}^{1-c_1/\log(T)-iT} G(s)\,\mathrm{d}s$. On va maintenant majorer les trois intégrales.

Pour I_1 et I_1'. On majore $|I_1|$ par l'intégrale du module de son intégrande, où la proposition C.4 nous dit que le quotient $\zeta'(s)/\zeta(s)$ est dominé par $\log(T)$ et où le module de $\sigma+iT$ est supérieur à T. On a :

$$\left|\int_{1-\frac{c_1}{\log(T)}+iT}^{\kappa+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{x}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{O(\log(T))}{T}\int_{1-\frac{c_1}{\log(T)}}^{\kappa} x^\sigma \mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{x\,O(\log(T))}{T}.$$

On donc bien montré que I_1 est dominée par $\frac{x\log(T)}{T}$; on obtient la même domination pour I_1' qui est un cas symétrique.

Pour I_2. On utilise encore une fois la domination de la proposition C.4 pour dominer $|I_2|$, on a

$$|I_2| \leqslant O\left(\log(T)\right)\int_{-T}^{T}\left|\frac{x^{-\frac{c_1}{\log(T)}+it}}{1-\frac{c_1}{\log(T)}+it}\right|\mathrm{d}t.$$

Où il existe une constante c_2 telle que pour tout t compris entre $-T$ et T on puisse faire la majoration : $|1-\frac{c_1}{\log(T)+iT}| \geqslant \frac{c_2}{\log(T)}$. On a donc :

$$|I_2| \leqslant \frac{O(\log^2(T))}{c_2}e^{1-\frac{c_1}{\log(T)}} = O\left(\log^2(T)x\,e^{-c_1\frac{\log(x)}{\log(T)}}\right).$$

Conclusion. On a démontré que pour tout $x,T \geqslant 2$, on a $|I_1|, |I_1'|$ dominé par $x\log(T)/T$ et $|I_2|$ dominé par $x\exp(-c_1\frac{\log(x)}{\log(T)})$. On peut reporter ces dominations dans l'équation (22) :

$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x\log(T)}{T}\right) + O\left(\log^2(T)x\,e^{-c_1\frac{\log(x)}{\log(T)}}\right) + O\left(\log(x)\left(1+\frac{x\log(T)}{T}\right)\right).$$

Soient maintenant c_0 un réel strictement positif tel que $c_0 < \sqrt{c_1}$ et $T = \exp(c_0\log(x))$, alors pour x assez grand (suffisamment grand pour que T soit supérieur ou égal à 2) on a bien l'identité $\psi(x) = x + O\left(x\,e^{-c_0\sqrt{\log(x)}}\right)$.

Seconde estimation. Pour trouver l'estimation du reste sur $\pi(x)$, on utilise celle que l'on vient de trouver pour $\psi(x)$ et on applique le lemme C.2 avec $R(x) = x\,\exp(-c_0\sqrt{\log(x)})$; On a :

$$R'(x) = \frac{e^{-c_0\sqrt{\log(x)}}\left(2\sqrt{\log(x)}-c_0\right)}{2\sqrt{\log(x)}},$$

Et donc R est strictement croissante pour $x \geqslant \exp(c_0^2/4)$. On a trivialement $R(x)/\log(x)$ dominé par $R(x)$ et clairement $R(\sqrt{x})\sqrt{x}$ dominé par $R(x)$. Le lemme C.2 nous donne donc bien l'égalité $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(R(x)\right)$, ce qui est le résultat annoncé. ◆

Bibliographie

Ci-dessous la liste de l'ensemble des éléments bibliographiques utilisés pour la rédaction de ce mémoire. Les trois livres les plus utilisés sont sans doute [Ten08], [Hin08] et [Edw74]. Certaines sources, notamment celles provenant d'Internet, ne sont pas citées.

[BS07] N. Berline et C. Sabbah – « La fonction zêta », ch. 1, Les Éditions de l'École Polytechnique, octobre 2007, Journées X-UPS 2002.

[Edw74] H. M. Edward – *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974.

[Erd49] P. Erdös – *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, National Academy of Sciences of the United States of America, 1949.

[God01] M. Goderfroy – *La fonction Gamma : théorie, histoire, bibliographie*, Gauthier-Villars, 1901.

[Had93] J. Hadamard – « Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann », Journal de mathématiques pures et appliquées, 1893, p. 171–216.

[Had96] — , « Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences sur l'arithmétique », *Bulletin de la Société mathématique de France* **24** (1896), p. 199–220.

[Hin08] M. Hindry – *Arithmétique*, Tableau Noir, Calvage & Mounet, janvier 2008.

[Leg97] A.-M. Legendre – *Essai sur la théorie des nombres*, An VI (1797).

[New80] D. J. Newman – « Simple analytic proof of the prime number theorem », *The American Mathematical Monthly* **87** (1980), no. 9, p. 693–696.

[Rie59] B. Riemann – « Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée », (1859).

[Rud98] W. Rudin – « Analyse réelle et complexe », ch. 15, Dunod, 1998.

[Sel49] A. Selberg – *An elementary proof of the prime-number theorem*, Annals of Mathematics, 1949.

[Ten08] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Belin, mars 2008.

[Tit30] E. C. Titchmarsh – *The theory of the Riemann zeta-functions*, Cambridge University Press, 1930.

[Tre06] J.-M. Trepreau – « Fonctions d'une variable complexe », Cours de LM366, 2006.

[VP97] C.-J. d. l. Vallée Poussin – *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, 1897.

[VP99] — , *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, 1899.